UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Statistiques

W. Aschbacher **MB31 L2** Cours du 1er semestre 2013–2014 *Licence Biologie*

Examen du 02/12/2013 (Contrôle continu 1)
Durée : 120 minutes
Moyens autorisés : Un aide-mémoire constitué d'une seule feuille A4 recto-verso

---

Nota bene : Un point n'est accordé que si, pour chaque question, tous les items sont correctement cochés. Il n'y aura pas de demi-points ou de points négatifs.

Question 1. [1.0] Soient n points dans le plan t.q. aucun triplet de points n'est colinéaire. Quel est le nombre de droites définies par ces points ?

☐ $2!A_n^2$ ☐ $n!C_n^2$ ☐ $\frac{1}{2!}A_n^2$

Question 2. [1.0] Lesquelles des familles suivantes sont des tribus sur $\Omega = \{a, b, c\}$?

☐ $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$ ☐ $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$ ☐ $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \Omega\}$

Question 3. [1.0] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soient $A, B \in \mathcal{A}$ t.q. $A \cap B = \emptyset$. Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

☐ $P : \Omega \to [0, 1]$ ☐ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ☐ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Question 4. [1.0] Soit X une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

☐ $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ☐ $\mathrm{card}(X(\Omega))$ est fini. ☐ L'application $x \mapsto P(X < x)$ est continue.

Question 5. [1.0] Soit X une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, F sa fonction de répartition et $x_0, x_1 \in X(\Omega)$. Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

☐ F est continue. ☐ $F(x_0) > F(x_1)$ si $x_0 < x_1$ ☐ $F(x_1) - F(x_0) = P_X(x_0)$ si $x_0 < x_1$

Question 6. Lors du tirage aléatoire dans l'ensemble des familles à deux enfants, on note d'abord le sexe de l'aîné et ensuite le sexe du cadet des enfants (le sexe sera noté f et g).

(a) [1.0] Quel est l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui modélise cette expérience ?

☐ $\Omega = \{\{\mathsf{f}, \mathsf{f}\}, \{\mathsf{f}, \mathsf{g}\}, \{\mathsf{g}, \mathsf{g}\}\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, P : équiprobabilité

☐ $\Omega = \{\mathsf{f}, \mathsf{g}\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, P : équiprobabilité

☐ $\Omega = \{\mathsf{f}, \mathsf{g}\}^2$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, (\mathsf{f}, \mathsf{g}), \Omega\}$, P : équiprobabilité

Question 6. (Suite)

(b) [1.0] Dans le modèle choisi dans (a), quels ensembles $A, C \in \mathcal{A}$ décrivent respectivement les deux événements *"L'aîné est un garçon."* et *"Le cadet est un garçon."* ?

☐ $A = \{\{\mathsf{g}, \mathsf{f}\}, \{\mathsf{g}, \mathsf{g}\}\}$, $C = \{\{\mathsf{f}, \mathsf{g}\}, \{\mathsf{g}, \mathsf{g}\}\}$
☐ $A = \{(\mathsf{g}, \mathsf{f}), (\mathsf{g}, \mathsf{g})\}$, $C = \{(\mathsf{f}, \mathsf{g}), (\mathsf{g}, \mathsf{g})\}$
☐ $A = \{(\mathsf{g}, \mathsf{f}), (\mathsf{g}, \mathsf{g})\}$, $C = \{(\mathsf{f}, \mathsf{g}), (\mathsf{g}, \mathsf{f}), (\mathsf{g}, \mathsf{g})\}$

(c) [1.0] Quelle est la probabilité des événements A et C ?

☐ $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ☐ $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

(d) [1.0] Quelle est la probabilité que les deux enfants sont des garçons sachant que l'aîné est un garçon ?

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$

(e) [1.0] Quelle est la probabilité que les deux enfants sont des garçons sachant qu'au moins l'un des enfants est un garçon ?

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$

Question 7. On lance deux fois une pièce de monnaie et on note p et f pile et face. En plus, soit X la variable aléatoire discrète qui compte le nombre de fois qu'on a obtenu pile. Pour modéliser cette expérience, nous choisissons $\Omega = \{\mathsf{p}, \mathsf{f}\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P l'équiprobabilité.

(a) [1.0] Quel est l'univers image de X ?

☐ $\{0, 1, 2\}$ ☐ $\{1, 2, 3\}$ ☐ $\{1, 2\}$

(b) [1.0] Quelles sont les probabilités de la loi de X ?

☐ $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$ ☐ $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$

(c) [1.0] Quelle est l'espérance de X ?

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ $\frac{3}{2}$

(d) [1.0] Quel est l'écart type de X ?

☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Question 8. Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit $\{(x_0, p_0), (x_1, p_1)\}$ la loi de X.

(a) [1.0] Que vaut $E(X^2)$?

☐ $p_0^2 x_0 + p_1^2 x_1$ ☐ $p_0 x_0^2 + p_1 x_1^2$ ☐ $p_0^2 x_0^2 + p_1^2 x_1^2$

(b) [1.0] Soient $x_0 = -1$ et $x_1 = 1$. Que valent p_0 et p_1 si $E(X) = 0$ et $E(X^2) = 1$?

☐ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$

(c) [1.0] Si la loi de X a les valeurs de (b), quelle est la variance de X ?

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2

Question 9. [3.0] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soient $A, B \in \mathcal{A}$ deux événements indépendants (p.r. à P). Montrer que, si $A = B$, on a

$$P(A) \in \{0, 1\}.$$