UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Statistiques

W. Aschbacher **MB31 L2** Cours du 1er semestre 2013–2014 *Licence Biologie*

Examen du 16/12/2013 (Contrôle continu 2)
Durée : 120 minutes
Moyens autorisés : Un aide-mémoire constitué d'une seule feuille A4 recto-verso

---

Nota bene : Un point n'est accordé que si, pour chaque question, tous les items sont correctement cochés. Il n'y aura pas de demi-points ou de points négatifs.

Question 1. [1.0] Le code d'un coffre-fort est composé de cinq chiffres (entre 0 et 9). Combien y a-t-il de codes qui forment une suite de chiffres croissante ?

☐ A_{10}^5 ☐ $\frac{1}{5!}A_{10}^5$ ☐ $5!C_{10}^5$

Question 2. [1.0] Lesquelles des familles suivantes sont des tribus sur $\Omega = \{1, 2, 3\}$?

☐ $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \Omega\}$ ☐ $\{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ ☐ $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \Omega\}$

Question 3. [1.0] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète. Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

☐ $P(X > 0) = P_X(\{x \in \Omega \,|\, x > 0\})$ ☐ $P_X(X(\Omega)) = 1$ ☐ $X \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$

Question 4. [1.0] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un couple de variables aléatoires discrètes. Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

☐ $E(XY) = E(X)E(Y)$ ☐ $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ ☐ $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Question 5. [1.0] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire absolument continue de densité f. Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

☐ $F(0) = \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}x\, f(x)$ ☐ $E(X^2) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, x f(x^2)$ ☐ $P(X \in [0, 1]) = \int_0^1 \mathrm{d}x\, f(x)$

Question 6. Un échantillon d'ADN de drosophiles est constitué d'un grand nombre de copies d'une séquence spécifique provenant respectivement à 20%, 40% et 40% de trois mouches différentes. Les proportions de copies défectueuses sont respectivement 5%, 4% et 2%.
On choisit au hasard une copie dans l'échantillon et on détermine de quelle mouche elle provient (noté i avec $i \in \{1, 2, 3\}$) et si elle est défectueuse ou intacte (noté D ou I).

(a) [1.0] Quel est l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ qui modélise cette expérience ?

☐ $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\Omega = \{1, 2, 3\} \times \{\text{D}, \text{I}\}$

☐ $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\Omega = \{1, 2, 3, \text{D}, \text{I}\}$

☐ $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\Omega = \{(1, 2, 3), (\text{D}, \text{I})\}$

Question 6. (Suite)

(b) [1.0] Dans le modèle choisi, quels ensembles $A_i, B \in \mathcal{A}$ décrivent respectivement les événements *"La copie provient de la i-ième mouche."* et *"La copie est défectueuse."* ?

☐ $A_i = \{i\}$ et $B = \{\mathsf{D}\}$

☐ $A_i = \{(i, \mathsf{D}), (i, \mathsf{I})\}$ et $B = \{(1, \mathsf{D}), (2, \mathsf{D}), (3, \mathsf{D})\}$

☐ $A_i = \{(i, \mathsf{D}, \mathsf{I})\}$ et $B = \{(1, 2, 3, \mathsf{D})\}$

(c) [1.0] Quelle est la probabilité que la copie provient de la i-ième mouche ($i \in \{1, 2, 3\}$) ?

☐ $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}$ ☐ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

(d) [1.0] Quelle est la probabilité que la copie est défectueuse sachant quelle provient de la i-ième mouche ?

☐ $\frac{1}{25}, \frac{1}{25}, \frac{1}{50}$ ☐ $\frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}$ ☐ $\frac{1}{20}, \frac{1}{25}, \frac{1}{50}$

(e) [1.0] Quelle est la probabilité que la copie provient de la i-ième mouche sachant qu'elle est défectueuse ?

☐ $\frac{7}{17}, \frac{6}{17}, \frac{3}{17}$ ☐ $\frac{6}{17}, \frac{8}{17}, \frac{5}{17}$ ☐ $\frac{5}{17}, \frac{8}{17}, \frac{4}{17}$

Question 7. Dans l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé équilibré à six faces, modélisée par l'espace probabilisé $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et l'équiprobabilité P, la variable aléatoire discrète X fournit la valeur 1 si le nombre obtenu est pair et 0 sinon.

(a) [1.0] Quel est l'univers image $X(\Omega)$?

☐ $\{0, 1\}$ ☐ $\{1, \ldots, 6\}$ ☐ $\{2, 4, 6\}$

(b) [1.0] Quel est la tribu image de $\mathcal{A}_X$?

☐ $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ ☐ $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{6\}, \Omega\}$ ☐ $\{\emptyset, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$

(c) [1.0] Quelles sont les probabilités de la loi de X ?

☐ $\frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{6}$ ☐ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

(d) [1.0] Quelle loi suit la variable X ?

☐ Loi de Dirac ☐ Loi de Bernoulli ☐ Loi de Poisson

Question 8. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire absolument continue dont la densité f est donnée, pour un $a \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \begin{cases} 2a(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) [1.0] Quelle est la valeur de a ?

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2

(b) [1.0] Quelle est la fonction de répartition $F(x)$ de X pour $x \in [0, 1]$?

☐ $x(2-x)$ ☐ $\frac{1}{2}x(2-x)$ ☐ $2x(1-x)$

(c) [1.0] Quelle est la valeur de $P(0 \leq X < 1)$?

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2

Question 9. [3.0] Soit X une variable aléatoire absolument continue sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que la fonction de répartition F de X est croissante au sens large sur $\mathbb{R}$.