UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Statistiques – TD 4

W. Aschbacher (*http://aschbacher.univ-tln.fr/*)

MB31 L2 Cours du 1er semestre 2013–2014 (6×2h CM et 8×1:30h TD)

Licence Biologie

Exercice 11. On lance deux pièces de monnaie et on s'intéresse aux résultats suivants :
Résultat 1 : Obtenir pile sur la première pièce.
Résultat 2 : Obtenir pile sur la deuxièment pièce.
Résultat 3 : Obtenir pile précisément sur une pièce.

(a) Les résultats, sont-ils indépendants (deux à deux) ?

(b) Les résultats, sont-ils mutuellement indépendants ?

Mots-clés : Indépendance

<u>Solution</u> Nous choisissons l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ spécifié par

$$\Omega := \{\mathsf{p}, \mathsf{f}\}^2, \quad \mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega), \quad P \text{ l'équiprobabilité.}$$

Les événements A_1, A_2 et A_3 qui représentent *Résultat 1*, *2* et *3* sont décrits par

$$A_1 := \{(\mathsf{p}, \mathsf{p}), (\mathsf{p}, \mathsf{f})\}, \quad A_2 := \{(\mathsf{p}, \mathsf{p}), (\mathsf{f}, \mathsf{p})\}, \quad A_3 := \{(\mathsf{p}, \mathsf{f}), (\mathsf{f}, \mathsf{p})\}.$$

(a) Comme on a

$$A_1 \cap A_2 = \{(\mathsf{p}, \mathsf{p})\}, \quad A_1 \cap A_3 = \{(\mathsf{p}, \mathsf{f})\}, \quad A_2 \cap A_3 = \{(\mathsf{f}, \mathsf{p})\},$$

nous obtenons que

$$P(A_1) = \frac{\operatorname{card}(A_1)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2},$$
$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{\operatorname{card}(A_1 \cap A_2)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{1}{4}, \quad P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}.$$

Les événements sont donc indépendants deux à deux (cf. Déf. 2.19).

(b) D'autre part, nous avons

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\emptyset) = 0.$$

Les événements ne sont donc pas mutuellement indépendants (cf. Déf. 2.20).

$\square$

Exercice 12. Démontrer En. 3.4.

Mots-clés : Espace probabilisé image, propriétés de la probabilité image

Solution D'abord, la tribu image $\mathcal{A}_X$ est la tribu triviale sur l'univers image $X(\Omega)$. Ensuite, nous vérifions que l'application $P_X : \mathcal{A}_X \to \mathbb{R}$ a les propriétés d'une probabilité (cf. Déf. 2.6) :

(P1) $P_X(I) = P(X^{-1}(I)) \in [0,1]$ pour tout $I \in \mathcal{A}_X$

(P2) $P_X(X(\Omega)) = P(X^{-1}(X(\Omega))) = P(\Omega) = 1$

(P3) Pour toute suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}_X$ t.q. $I_n \cap I_m = \emptyset$ pour tout $n \neq m$, on peut écrire

$$P_X\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\right) = P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\right)\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X^{-1}(I_n)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X^{-1}(I_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} P_X(I_n),$$

où, dans la 2e égalité, nous avons utilisé que $X^{-1}(\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^{-1}(I_n)$ et, dans la 3e égalité, que $X^{-1}(I_n) \cap X^{-1}(I_m) = X^{-1}(I_n \cap I_m) = X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. $\square$

Exercice 13. Soit l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ donné par

$$\Omega := \{a, b, c\}, \quad \mathcal{A} := \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \Omega\},$$

et soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ défini par $X(a) := 1$, $X(b) := 2$ et $X(c) := 3$.

(a) Soit P l'équiprobabilité. Peut-on définir une loi pour X ?

(b) Soit P une probabilité t.q. $P(\{c\}) = 1$. En plus, soit $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ défini par $Y(\omega) := 3$ pour tout $\omega \in \Omega$. Calculer $P(X = Y) := P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = Y(\omega)\})$. Peut-on conclure que X et Y ont la même loi ?

Mots-clés : Vad, loi

Solution

(a) L'univers image a la forme $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et donc, la condition *(VAD 1)* de Déf. 3.1 est satisfaite. Par contre, la condition *(VAD 2)* de Déf. 3.1 ne l'est pas parce que, pour $\{1\} \in \mathcal{P}(X(\Omega))$, on a

$$X^{-1}(\{1\}) = \{a\} \notin \mathcal{A}.$$

Alors, X n'est pas une vad et on ne peut donc pas lui associer une loi.

(b) D'après Ex. 3.7 *(b)*, Y est la variable certaine. Comme $\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = Y(\omega)\} = \{c\}$, on obtient

$$P(X = Y) = P(\{c\}) = 1.$$

Néanmoins, Y n'a pas la même loi que X parce que X n'a pas de loi d'après (a).

□

Exercice 14. Calculer la fonction de répartition pour les deux vad suivantes :

(a) Variable certaine

(b) Variable indicatrice

Mots-clés : Fonction de répartition

Solution Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une vad. Alors, d'après En. 3.9, la fonction de répartition $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de X s'écrit comme (cf. Figure 3.10)

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i,$$

où $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ et $p_i = P_X(x_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, c.-à-d., $\{(x_i, p_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ est la loi de X.

(a) D'après Ex. 3.7 *(b)*, on trouve Fig. Exr-14a.

(b) D'après Ex. 3.7 *(c)*, on trouve Fig. Exr-14b.

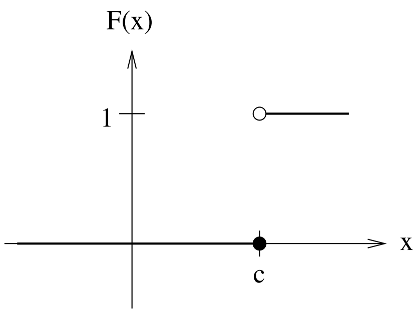

Figure Exr-14a

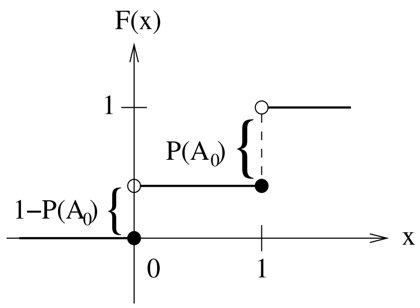

Figure Exr-14b

□