UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 *Licence Mathématiques* (W. Aschbacher)

Examen du 21/04/2015 (Contrôle terminal)
Durée : 120 minutes.
Matériel autorisé : Un aide-mémoire constitué d'une seule feuille A4 recto-verso.

Questions à choix multiple

Nota bene : Un point n'est accordé que si, pour chaque question, tous les items sont correctement cochés. Il n'y aura pas de demi-points ou de points négatifs.

Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

Question 1. [1.0] Soit $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire.
- ☐ Si T est $\mathbb{C}$-linéaire, alors $T(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $\mu = 0$.
- ☐ T est $\mathbb{C}$-linéaire ssi $T(z) = T(1)\mathrm{Re}(z) + T(\mathrm{i})\mathrm{Im}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- ☐ Si T est conforme, alors il existe $a \in \mathbb{C}^*$ t.q. $T(z) = az$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Question 2. [1.0] Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continûment partiellement dérivable en D qui conserve les angles et l'orientation en D.
- ☐ $Df(c)$ est injectif.
- ☐ $f'(c) = 0$
- ☐ f est ouvert.

Question 3. [1.0] Soit $f \in C(D)$ et $F \in \mathcal{O}(D)$ une primitive de f dans D.
- ☐ $f \in \mathcal{O}(D)$
- ☐ f est $\mathbb{C}$-intégrable dans D.
- ☐ $\int_\gamma \mathrm{d}z\, f(z) = 0$ pour toute courbe γ dans D

Question 4. [1.0] Soit D étoilé et soit $f_n \in \mathcal{O}(D)$ une suite de fonctions qui converge localement uniformément dans D vers $f : D \to \mathbb{C}$.
- ☐ f est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable dans D.
- ☐ f satisfait la condition de Morera dans D.
- ☐ $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément dans D vers f'.

Question 5. [1.0] Quel est le théorème principal utilisé dans la démonstration de la formule intégrale de Cauchy pour les disques ?

Questions ouvertes

Nota bene : Les réponses à toutes les questions sont à justifier.
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Question 6. [3.0] Soit $f \in \mathcal{O}(B_1(0))$ et $0 < \rho < 1$ quelconque. Montrer :

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, f(\rho \mathrm{e}^{it}) \quad \text{ne dépend pas de } \rho.$$

Indication : Réécrire l'intégrale comme une intégrale curviligne complexe.

Question 7. [8.0] Soit $0 < a < 1$. Utiliser le théorème des résidus pour calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1 + \mathrm{e}^x}$$

Indications : Choisir un rectangle de sommets $\pm R$ et $\pm R + 2\pi\mathrm{i}$. Lesquels de ses côtés contribuent à la valeur de l'intégrale ?

Question 8. [4.0] Soit D connexe et $f \in \mathcal{O}(D)$. Une fonction $g \in \mathcal{O}(D)$ s'appelle un **logarithme de f dans D** si, pour tout $z \in D$, on a

$$\mathrm{e}^{g(z)} = f(z).$$

Montrer :
Si, pour une fonction $f \in \mathcal{O}(D)$ sans zéros dans D, la **dérivée logarithmique de** f, c.-à-d., f'/f, est $\mathbb{C}$-intégrable dans D, alors il existe un logarithme de f dans D.

Indication : Construire une fonction dont la dérivée est égale à zéro.