UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 *Licence Mathématiques* (W. Aschbacher)

Examen du 21/04/2015 (Contrôle terminal)
Durée : 120 minutes.
Matériel autorisé : Un aide-mémoire constitué d'une seule feuille A4 recto-verso.

Questions à choix multiple

Nota bene : Un point n'est accordé que si, pour chaque question, tous les items sont correctement cochés. Il n'y aura pas de demi-points ou de points négatifs.

Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

Question 1. [1.0] Soit $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire.
☒ Si T est $\mathbb{C}$-linéaire, alors $T(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $\mu = 0$.
☐ T est $\mathbb{C}$-linéaire ssi $T(z) = T(1)\mathrm{Re}(z) + T(\mathrm{i})\mathrm{Im}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
☐ Si T est conforme, alors il existe $a \in \mathbb{C}^*$ t.q. $T(z) = az$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

<u>Solution</u>

☒ Prop. 1.6 *(a)* et *(b)*
☐ Lem. 1.6 *(a)*
☐ Prop. 1.11 *(c)* ☐

Question 2. [1.0] Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continûment partiellement dérivable en D qui conserve les angles et l'orientation en D.
☒ $Df(c)$ est injectif.
☐ $f'(c) = 0$
☒ f est ouvert.

<u>Solution</u>

☒ Déf. 2.17 et Déf. 1.10
☐ Thm. 2.22
☒ Thm. 2.22 et Thm. 8.12 ☐

Question 3. [1.0] Soit $f \in C(D)$ et $F \in \mathcal{O}(D)$ une primitive de f dans D.
☒ $f \in \mathcal{O}(D)$
☒ f est $\mathbb{C}$-intégrable dans D.
☐ $\int_\gamma \mathrm{d}z\, f(z) = 0$ pour toute courbe γ dans D

Solution

☒ Thm. 7.10
☒ Déf. 6.14
☐ Thm. 6.15 ☐

Question 4. [1.0] Soit D étoilé et soit $f_n \in \mathcal{O}(D)$ une suite de fonctions qui converge localement uniformément dans D vers $f : D \to \mathbb{C}$.
☒ f est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable dans D.
☒ f satisfait la condition de Morera dans D.
☒ $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément dans D vers f'.

Solution

☒ Thm. 8.8 *(a)* et Thm. 7.10
☒ Déf. 8.9 et Thm. 7.2
☒ Thm. 8.8 *(b)* ☐

Question 5. [1.0] Quel est le théorème principal utilisé dans la démonstration de la formule intégrale de Cauchy pour les disques ?

Solution

Le théorème intégral de Cauchy (généralisé) pour les domaines étoilés (cf. Thm. 7.3). ☐

Questions ouvertes

Nota bene : Les réponses à toutes les questions sont à justifier.
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Question 6. [3.0] Soit $f \in \mathcal{O}(B_1(0))$ et $0 < \rho < 1$ quelconque. Montrer :

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, f(\rho \mathrm{e}^{it}) \quad \text{ne dépend pas de } \rho.$$

Indication : Réécrire l'intégrale comme une intégrale curviligne complexe.

<u>Solution</u> En utilisant l'indication, nous introduisons le chemin $\gamma(t) := \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Ce chemin parcourt le bord du cercle $\partial B_\rho(0)$ dans le sens positif et nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, f(\rho \mathrm{e}^{it}) &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)}\, \gamma(t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)}\, (-\mathrm{i})\gamma'(t) = -\mathrm{i} \int_\gamma \mathrm{d}z\, \frac{f(z)}{z} \\ &= -\mathrm{i} \int_{\partial B_\rho(0)} \mathrm{d}z\, \frac{f(z)}{z}.\end{aligned}$$

Comme $f \in \mathcal{O}(B_1(0))$, la fonction g, définie par $g(z) := f(z)/z$ pour tout $z \in B_1(0) \setminus 0$, satisfait $g \in \mathcal{O}(B_1(0) \setminus 0)$. Alors, le théorème de Cauchy pour des couronnes (cf. Thm. 10.2) appliqué au cas de $c = 0$, $r = 0$, $s = 1$ et $g \in \mathcal{O}(A_{0,1}(0))$ nous fournit que, pour tout $0 < \rho < \sigma < 1$,

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, f(\rho \mathrm{e}^{it}) = -\mathrm{i} \int_{\partial B_\rho(0)} \mathrm{d}z\ g(z) = -\mathrm{i} \int_{\partial B_\sigma(0)} \mathrm{d}z\ g(z) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, f(\sigma \mathrm{e}^{it}),$$

c.-à-d., cette intégrale ne dépend pas de ρ si ρ varie dans l'intervalle $]0, 1[$. □

Question 7. [8.0] Soit $0 < a < 1$. Utiliser le théorème des résidus pour calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1 + \mathrm{e}^x}$$

Indications : Choisir un rectangle de sommets $\pm R$ et $\pm R + 2\pi\mathrm{i}$. Lesquels de ses côtés contribuent à la valeur de l'intégrale ?

<u>Solution</u> Les zéros du dénominateur de la fonction $f(z) := \mathrm{e}^{az}/(1 + \mathrm{e}^z)$ se déterminent en utilisant $\ker(\exp)$, c.-à-d., la condition $1 + \mathrm{e}^z = 0$ peut s'écrire comme $\mathrm{e}^{z+\mathrm{i}\pi} = 1$ d'où nous obtenons que $z + \mathrm{i}\pi \in \ker(\exp) = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$. Alors, les zéros sont paramétrés par $n \in \mathbb{Z}$, c.-à-d., ils

ont la forme

$$z_n := (2n+1)\pi\mathrm{i}.$$

Il en résulte qu'il existe un zéro dans le rectangle indiqué, à savoir le zéro $z_0 = \pi\mathrm{i}$ pour $n = 0$. D'après Exr. 73, la fonction f possède un pôle simple en z_0 parce que les fonctions $h(z) := \mathrm{e}^{az}$ et $g(z) := 1 + \mathrm{e}^z$ ont les propriétés $h, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $h(z_0) = \mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}} \neq 0$, $g(z_0) = 0$ et $g'(z_0) = -1 \neq 0$. En plus, Exr. 73 nous fournit que

$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = \mathrm{res}_{z_0}\left(\frac{h}{g}\right) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} = -\mathrm{e}^{\pi a\mathrm{i}}.$$

Ensuite, en utilisant l'indication, nous choisissons les courbes

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &:= R + \mathrm{i}t, \quad t \in [0, 2\pi],\\
\gamma_2(t) &:= -t + 2\pi\mathrm{i}, \quad t \in [-R, R],\\
\gamma_3(t) &:= -R + (2\pi - t)\mathrm{i}, \quad t \in [0, 2\pi].
\end{aligned}$$

Les contributions de ces courbes sont les suivantes.
Contribution γ_1 :
Comme $\mathrm{e}^R > 1$ si $R > 0$, nous pouvons écrire que

$$\left|\int_{\gamma_1} \mathrm{d}z\, f(z)\right| = \left|\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{e}^{a(R+\mathrm{i}t)}}{1 + \mathrm{e}^{R+\mathrm{i}t}}\,\mathrm{i}\right| \leq \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{e}^{aR}}{|1 + \mathrm{e}^{R+\mathrm{i}t}|} \leq 2\pi \frac{\mathrm{e}^{aR}}{\mathrm{e}^R - 1} = \underbrace{\frac{2\pi}{\mathrm{e}^{(1-a)R} - \mathrm{e}^{-aR}}}_{\longrightarrow 0},$$

où nous avons utilisé l'inégalité triangulaire $|1 + \mathrm{e}^{R+\mathrm{i}t}| \geq |\mathrm{e}^{R+\mathrm{i}t}| - 1 = \mathrm{e}^R - 1$.
Contribution γ_3 :
De la même manière, nous obtenons

$$\left|\int_{\gamma_3} \mathrm{d}z\, f(z)\right| = \left|\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{e}^{a(-R+(2\pi-t)\mathrm{i})}}{1 + \mathrm{e}^{-R+(2\pi-t)\mathrm{i}}}\,(-\mathrm{i})\right| \leq 2\pi \frac{\mathrm{e}^{-aR}}{1 - \mathrm{e}^{-R}} = \underbrace{\frac{2\pi}{\mathrm{e}^{aR} - \mathrm{e}^{-(1-a)R}}}_{\longrightarrow 0}.$$

Contribution γ_2 :
Cette contribution sera un multiple de l'intégrale de $-R$ à R parce que

$$\int_{\gamma_2} \mathrm{d}z\, f(z) = -\int_{-R}^{R} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{e}^{a(-t+2\pi\mathrm{i})}}{1 + \mathrm{e}^{-t+2\pi\mathrm{i}}} = -\mathrm{e}^{2\pi a\mathrm{i}} \int_{-R}^{R} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{e}^{-at}}{1 + \mathrm{e}^{-t}} = -\mathrm{e}^{2\pi a\mathrm{i}} \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1 + \mathrm{e}^{x}}.$$

Alors, comme, pour $D := \{z \in \mathbb{C} \,|\, -\pi/2 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 5\pi/2\}$, nous avons que D est étoilé, que le bord du rectangle est une courbe simplement fermée dans D, que $A = \{z_0\}$ est fini, que z_0 ne se trouve pas sur le bord du rectangle et que $f \in \mathcal{O}(D \setminus z_0)$, le théorème des résidus nous fournit que

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} \mathrm{d}x\, f(x) + \sum_{i=1}^{3} \int_{\gamma_i} \mathrm{d}z\, f(z) = (1 - \mathrm{e}^{2\pi a\mathrm{i}}) \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x\, f(x) + \sum_{i \in \{1,3\}} \int_{\gamma_i} \mathrm{d}z\, f(z) &= 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_{z_0}(f)\\
&= -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\pi a\mathrm{i}}.
\end{aligned}$$

En prenant la limite $R \to \infty$, nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\pi a\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{2\pi a\mathrm{i}}-1} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

$\square$

Question 8. [4.0] Soit D connexe et $f \in \mathcal{O}(D)$. Une fonction $g \in \mathcal{O}(D)$ s'appelle un **logarithme de f dans D** si, pour tout $z \in D$, on a

$$\mathrm{e}^{g(z)} = f(z).$$

Montrer :
Si, pour une fonction $f \in \mathcal{O}(D)$ sans zéros dans D, la **dérivée logarithmique de** f, c.-à-d., f'/f, est $\mathbb{C}$-intégrable dans D, alors il existe un logarithme de f dans D.

Indication : Construire une fonction dont la dérivée est égale à zéro.

Solution Comme la fonction $f \in \mathcal{O}(D)$ est sans zéros dans D, sa dérivée logarithmique f'/f est bien définie. En plus, comme f'/f est $\mathbb{C}$-intégrable, il existe $F \in \mathcal{O}(D)$ t.q. $F' = f'/f$ (cf. Déf. 6.14). En utilisant l'indication, nous définissons une fonction $h \in \mathcal{O}(D)$ par

$$h := f\mathrm{e}^{-F},$$

et nous remarquons que la dérivée de h est en effet égale à zéro,

$$h' = \underbrace{(f' - fF')}_{=0}\mathrm{e}^{-F}.$$

Alors, comme D est connexe, il existe $a \in \mathbb{C}$ t.q. $h(z) = a$ pour tout $z \in D$. En plus, comme f n'a pas de zéro dans D, il faut que $a \neq 0$. Finalement, comme la fonction exponentielle est surjective (cf. Prop. 5.7), il existe $b \in \mathbb{C}$ t.q. $a = \mathrm{e}^b$. Alors, nous obtenons que, pour tout $z \in D$,

$$f(z) = a\mathrm{e}^{F(z)} = \mathrm{e}^b\mathrm{e}^{F(z)} = \mathrm{e}^{F(z)+b},$$

et, comme $F + b \in \mathcal{O}(D)$, nous arrivons à la conclusion.

$\square$