Fonctions analytiques – TD 1

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 1. $\mathbb{C}$ est un corps.

Solution On vérifie directement les axiomes *(K1)*, *(K2)* et *(K3)* de Déf. 1.1. en notant notamment que, pour $\mathbb{C} \ni z := (x, y) \neq 0$, on a l'inverse multiplicatif

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

$\square$

Exercice 2. Une application $\mathbb{R}$-linéaire $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire ssi

$$T(\mathrm{i}) = \mathrm{i}T(1).$$

Dans ce cas, T a la forme $T(z) = T(1)z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Solution D'après Rap. 1.16, l'application $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire ssi $T(w_1 z_1 + w_2 z_2) = w_1 T(z_1) + w_2 T(z_2)$ pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et tout $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow$: Comme T est $\mathbb{C}$-linéaire, on a

$$T(\mathrm{i}) = T(\mathrm{i} \cdot 1) = \mathrm{i}T(1).$$

$\Leftarrow$: L'application T est $\mathbb{C}$-homogène parce que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $w \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} T(wz) &= T((p + \mathrm{i}q)(x + \mathrm{i}y)) = T((px - qy) + \mathrm{i}(py + qx)) = (px - qy)T(1) + (py + qx)T(\mathrm{i}) \\ &= (px - qy)T(1) + (py + qx)\mathrm{i}T(1) = (p + \mathrm{i}q)(x + \mathrm{i}y)T(1) = wT(z), \end{aligned}$$

où, dans la 3e égalité, nous avons utilisé que T est $\mathbb{R}$-linéaire (cf. Prop. 1.6 *(a)*), et dans la 4e et la 6e égalité, nous avons utilisé l'hypothèse $T(\mathrm{i}) = \mathrm{i}T(1)$. Comme T est $\mathbb{R}$-linéaire, T est additif et donc, T est $\mathbb{C}$-linéaire. $\square$

Exercice 3. L'application $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire ssi il existe $A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$ t.q. $T=T_A$ et $a=d$ et $b=-c$.

<u>Solution</u>

$\Rightarrow$: Soit T $\mathbb{C}$-linéaire. Alors, T est $\mathbb{R}$-linéaire et donc, d'après Prop. 1.8 *(a)*, il existe une matrice $A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$ t.q. $T=T_A$. Alors, en utilisant Prop. 1.6 *(b)*, on a

$$T(\mathrm{i})=b+\mathrm{i}d\overset{\text{Prop. 1.6 }(b)}{=}\mathrm{i}T(1)=\mathrm{i}(a+\mathrm{i}c),$$

c.-à-d., on trouve $a=d$ et $b=-c$.

$\Leftarrow$: Soit $T=T_A$ pour un $A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$ t.q. $a=d$ et $b=-c$. Alors, d'après Prop. 1.8 *(a)*, T est $\mathbb{R}$-linéaire. En plus, comme $T(1)=a+\mathrm{i}c$ et $T(\mathrm{i})=b+\mathrm{i}d$ et comme $a=d$ et $b=-c$, on obtient

$$T(\mathrm{i})=b+\mathrm{i}d=-c+\mathrm{i}a=\mathrm{i}(a+\mathrm{i}c)=\mathrm{i}T(1),$$

c.-à-d., d'après Prop. 1.6 *(b)*, l'application T est $\mathbb{C}$-linéaire. $\square$

Exercice 4. Soit $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire injective.

(c) Il existe $a\in\mathbb{C}^*$ t.q. :
soit $T(z)=az$ pour tout $z\in\mathbb{C}$, soit $T(z)=a\bar{z}$ pour tout $z\in\mathbb{C}$.

(d) Il existe $s>0$ t.q. $\langle T(w),T(z)\rangle=s\langle w,z\rangle$ pour tout $w,z\in\mathbb{C}$.

(a) T est conforme.

Montrer : *(c)* $\Rightarrow$ *(d)* $\Rightarrow$ *(a)*

<u>Solution</u>

(c) $\Rightarrow$ *(d)* : Comme $\langle aw,az\rangle=|a|^2\langle w,z\rangle$ et $\langle\bar{w},\bar{z}\rangle=\langle w,z\rangle$ pour tout $w,z\in\mathbb{C}$, on obtient

$$\langle T(w),T(z)\rangle=\underbrace{|a|^2}_{=:s>0}\langle w,z\rangle.$$

(d) $\Rightarrow$ *(a)* : Comme, d'après l'hypothèse, $|T(z)|=\sqrt{s}|z|$ pour tout $z\in\mathbb{C}$, nous obtenons, pour tout $w,z\in\mathbb{C}$,

$$|w||z|\langle T(w),T(z)\rangle=|w||z|s\langle w,z\rangle=\sqrt{s}|w|\sqrt{s}|z|\langle w,z\rangle=|T(w)||T(z)|\langle w,z\rangle.$$

$\square$