

Fonctions analytiques – TD 3

W. Aschbacher (<http://aschbacher.univ-tln.fr/>)

M65 L3 Cours du 2e semestre semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 9. Montrer : Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction \mathbb{R} -dérivable en D . Alors :

(a) $f \in \mathcal{O}(D)$ ssi $\bar{\partial}f = 0$ en D . Dans ce cas, $f' = \partial f$ en D .

(b) $\bar{f} \in \mathcal{O}(D)$ ssi $\partial f = 0$ en D . Dans ce cas, $\bar{f}' = \bar{\partial}f$ en D .

Exercice 10. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continûment partiellement dérivable qui conserve les angles et l'orientation. En plus, soient $\gamma, \mu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ des chemins dérivables t.q. $\gamma(t) = \mu(s) = c \in D$ et $\gamma'(t), \mu'(s) \neq 0$ pour des $t, s \in [0, 1]$. Alors, on a

$$\angle((f \circ \gamma)'(t), (f \circ \mu)'(s)) = \angle(\gamma'(t), \mu'(s)),$$

et le sens de la rotation de l'angle est préservé.

Exercice 11. La fonction de Blumenthal-Joukowski $J : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ est donnée, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, par

$$J(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

Montrer :

(a) J est conforme en $\mathbb{C}^* \setminus \{-1, 1\}$.

(b) Quelle est l'image des axes partant de l'origine et des cercles centrés à l'origine ?

Exercice 12. Soit $f \in \mathcal{O}(D)$, soit D' un ouvert non vide dans \mathbb{C} et soit $g \in \mathcal{O}(D')$ t.q.

$$f(D) \subseteq D', \quad g(D') \subseteq D, \quad f \circ g = 1_{D'}, \quad g \circ f = 1_D.$$

Montrer que $f : D \xrightarrow{\sim} D'$.