UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 3

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 9. Montrer : Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathbb{R}$-dérivable en D. Alors :

(a) $f \in \mathcal{O}(D)$ ssi $\bar{\partial} f = 0$ en D. Dans ce cas, $f' = \partial f$ en D.

(b) $\bar{f} \in \mathcal{O}(D)$ ssi $\partial f = 0$ en D. Dans ce cas, $\bar{f}' = \overline{\bar{\partial} f}$ en D.

Solution

(a) D'après Rem. 2.15 *(b)*, on a

$$\bar{\partial} f = f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + \mathrm{i} f_y) = \frac{1}{2}(u_x - v_y + \mathrm{i}(v_x + u_y)).$$

Alors, en utilisant les ECR, $f \in \mathcal{O}(D)$ ssi $\bar{\partial} f = 0$ en D. En plus, en utilisant de nouveau Rem. 2.15 *(b)* et Thm. 2.5, on peut écrire

$$\partial f = f_z = \frac{1}{2}(f_x - \mathrm{i} f_y) = \frac{1}{2}(u_x + \mathrm{i} v_x - \mathrm{i} u_y + v_y) \overset{\text{Thm. 2.5}}{=} \frac{1}{2}(f' + f').$$

(b) En remplaçant v par $-v$ et en utilisant les deux équations de *(a)*, on obtient l'énoncé.

$\square$

Exercice 10. Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continûment partiellement dérivable qui conserve les angles et l'orientation. En plus, soient $\gamma, \mu : [0,1] \to \mathbb{C}$ des chemins dérivables t.q. $\gamma(t) = \mu(s) = c \in D$ et $\gamma'(t), \mu'(s) \neq 0$ pour des $t, s \in [0,1]$. Alors, on a

$$\measuredangle((f \circ \gamma)'(t), (f \circ \mu)'(s)) = \measuredangle(\gamma'(t), \mu'(s)),$$

et le sens de la rotation de l'angle est préservé.

Solution D'aprés le théorème de dérivation des fonctions composées, Thm. 2.22 et Prop. 2.16 *(a)*, on a on a

$$(f \circ \gamma)'(t) = Df(c)\gamma'(t) = \underbrace{f_z(c)}_{=f'(c)}\gamma'(t) + \underbrace{f_{\bar{z}}(c)}_{=0}\overline{\gamma'(t)} = \underbrace{f'(c)}_{\neq 0}\underbrace{\gamma'(t)}_{\neq 0} \neq 0.$$

Comme f est conforme, $Df(c)$ est conforme et donc, d'après Prop. 1.11 *(b)*, on a, pour tout $z, w \in \mathbb{C}^*$,

$$\measuredangle(Df(c)w, Df(c)z) = \measuredangle(w, z).$$

En plus, le sens de la rotation de l'angle $\varphi := \measuredangle(\gamma'(t), \mu'(s))$ est préservé. Pour montrer cela, soit

$$\frac{\mu'(s)}{|\mu'(s)|} = R(\varphi)\,\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}, \quad \text{où } R(\varphi) := \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

est la matrice de rotation par l'angle φ autour de l'origine du plan (dans le sens des aiguilles d'une montre). Comme $|Df(c)z| = |f'(c)||z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{(f\circ\mu)'(s)}{|(f\circ\mu)'(s)|} &= \frac{Df(c)\mu'(s)}{|Df(c)\mu'(s)|} = \frac{Df(c)\frac{\mu'(s)}{|\mu'(s)|}}{|f'(c)|} = \frac{Df(c)R(\varphi)\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}}{|f'(c)|} = \frac{R(\varphi)Df(c)\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}}{|f'(c)|} \\ &= R(\varphi)\,\frac{Df(c)\gamma'(t)}{|f'(c)||\gamma'(t)|} = R(\varphi)\,\frac{(f\circ\gamma)'(t)}{|(f\circ\gamma)'(t)|},\end{aligned}$$

où nous avons utilisé que les matrices $Df(c)$ et $R(\varphi)$ commutent, c.-à-d., $Df(c)R(\varphi) = R(\varphi)Df(c)$, ce qui est une conséquence des ECR $u_x(c) = v_y(c)$ et $u_y(c) = -v_x(c)$. □

Exercice 11. La fonction de Blumenthal-Joukovski $J : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ est donnée, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, par

$$J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Montrer :

(a) J est conforme en $\mathbb{C}^* \setminus \{-1, 1\}$.

(b) Quelle est l'image des axes partant de l'origine et des cercles centrés à l'origine ?

Solution

(a) On a $J \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$ et, en utilisant Thm. 2.11 *(a)* et *(b)*, on trouve $J'(c) = (1 - 1/c^2)/2$ pour tout $c \in \mathbb{C}^*$. Alors, J est conforme en $\mathbb{C}^* \setminus \{-1, 1\}$.

(b) Si on pose $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ et $J = u + \mathrm{i}v$, on calcule

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \qquad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \tag{1}$$

Axes partant de l'origine : r varie de $0 < r \to \infty$ et φ est fixé
Si $\varphi \in [0, 2\pi) \setminus \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$, on peut écrire

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = \left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right]^2 = 1,$$

c.-à-d., on obtient l'équation d'une hyperbole en u et v.
Plus précisément, en utilisant le paramétrage (1), on trouve, p.ex. pour $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, qu'on parcourt la branche droite de l'hyperbole du bas vers le haut, c.-à-d., de $(u, v) = (+\infty, -\infty)$ à $(u, v) = (+\infty, +\infty)$, si r varie de 0 à $+\infty$. De manière analogue, si on fixe φ dans $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ ou $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, on obtient respectivement la branche gauche parcourue du bas vers le haut, la branche gauche parcourue du haut vers le bas et la branche droite parcourue du haut vers le bas.
En ce qui concerne les points $\varphi \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$, on obtient des branches d'hyperboles "dégénérées", c.-à-d., des demi-droites sur l'axe des u ou des droites entières sur l'axes des v (avec leurs sens de parcourt respectif).

Cercles centrés à l'origine : r est fixé et φ varie de $0 \leq \varphi < 2\pi$
Si $r \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, on peut écrire

$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right]^2} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,$$

c.-à-d., on obtient l'équation d'une ellipse en u et v.
Plus précisément, en utilisant le paramétrage (1), on trouve, p.ex. pour $r \in (0, 1)$, qu'on parcourt l'ellipse de grand axe $(1/r + r)/2 \geq 1$ et de petit axe $(1/r - r)/2$ dans le sens des aiguilles d'une montre si φ varie de 0 à 2π (c.-à-d., φ varie en sens inverse des aiguilles d'une montre). Si $r > 1$, on parcourt l'ellipse de grand axe $(r + 1/r)/2 \geq 1$ et de petit axe $(r - 1/r)/2$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre si φ varie de 0 à 2π, c.-à-d., on la parcourt en sens inverse p.r. au cas de $r < 1$. Finalement, si $r = 1$, on parcourt une ellipse "dégénérée" qui se réduit à l'intervalle $[-1, 1]$.
En résumé, le système des coordonnées polaires dans le plan (x, y) est transformé par J en un système de coordonnées "hyperbolo-elliptiques" dans le plan (u, v). Comme J est conforme en $\mathbb{C}^* \setminus \{-1, 1\}$, les angles d'intersection entre les hyperboles et les ellipses sont de $90°$. En plus, J conserve l'orientation des repères locaux.

$\square$

Exercice 12. Soit $f \in \mathcal{O}(D)$, soit D' un ouvert non vide dans $\mathbb{C}$ et soit $g \in \mathcal{O}(D')$ t.q.

$$f(D) \subseteq D', \quad g(D') \subseteq D, \quad f \circ g = 1_{D'}, \quad g \circ f = 1_D.$$

Montrer que $f : D \xrightarrow{\sim} D'$.

Solution Comme $f \circ g = 1_{D'}$, on a $f(D) = D'$. En plus, comme $g \circ f = 1_D$, on a également $g(D') = D$. $\square$