UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 4

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 13. Pour tout $A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, on a (cf. Déf. 2.28)

$$h_{AB} = h_A \circ h_B.$$

Exercice 14.

(a) Soit $q \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$ donné par $q(z) = -z^2$ pour tout $z \in \mathbb{H}$. Alors, $q : \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^-$.

(b) Soit $p \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ donné par $p(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ pour tout $z \in \mathbb{E}$. Alors, $p : \mathbb{E} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^-$.

Exercice 15. Soit $f_n : \mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{E} \to \mathbb{C}$ la suite de fonctions définie, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{E}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$f_n(z) := \frac{1}{1 + z^n}.$$

Montrer :

(a) Pour tout $0 < r < 1$, la suite converge uniformément vers 1 dans $B_r(0)$.

(b) Pour tout $R > 1$, la suite converge uniformément vers 0 dans $\mathbb{C} \setminus B_R(0)$.

(c) La suite ne converge pas uniformément dans $\mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{E}$.

Exercice 16. Soit $f_n : D \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions qui converge localement uniformément dans D. Alors, elle converge uniformément dans toute partie compacte de D.