UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 4

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 13. Pour tout $A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, on a (cf. Déf. 2.28)

$$h_{AB} = h_A \circ h_B.$$

Solution Soient $A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ t.q.

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Alors, pour tout $a_{ij}, b_{ij}, z \in \mathbb{C}$ t.q. $h_A \circ h_B(z)$ et $h_{AB}(z)$ sont bien définis, on peut calculer

$$h_A(h_B(z)) = \frac{a_{11}h_B(z) + a_{12}}{a_{21}h_B(z) + a_{22}} = \frac{a_{11}\frac{b_{11}z+b_{12}}{b_{21}z+b_{22}} + a_{12}}{a_{21}\frac{b_{11}z+b_{12}}{b_{21}z+b_{22}} + a_{22}} = h_{AB}(z).$$

□

Exercice 14.

(a) Soit $q \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$ donné par $q(z) = -z^2$ pour tout $z \in \mathbb{H}$. Alors, $q : \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^-$.

(b) Soit $p \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ donné par $p(z) = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$ pour tout $z \in \mathbb{E}$. Alors, $p : \mathbb{E} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^-$.

Solution *Indication :* Utiliser Rem. 2.26 *(a)* pour *(a)* et Rem. 2.26 *(b)* pour *(b)*.

(a) Nous voulons utiliser Rem. 2.26 *(a)* qui nous dit que si $q \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$ est injectif, alors q est une biholomorphie entre $\mathbb{H}$ et $q(\mathbb{H})$.

Il est clair que $q \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$ et, pour tout $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, on a

$$q(z) = y^2 - x^2 - 2\mathrm{i}xy.$$

Ensuite, q est injectif en $\mathbb{H}$ parce que, si $q(z) = q(z')$ pour des $z, z' \in \mathbb{H}$, c.-à-d., $0 = q(z') - q(z) = z'^2 - z^2 = (z' - z)(z' + z)$, on obtient $z' = \pm z$, c.-à-d., $x' + \mathrm{i}y' = \pm(x + \mathrm{i}y)$. Comme $y, y' > 0$, on arrive donc à $z' = z$.

Finalement, nous voulons montrer que $q(\mathbb{H}) = \mathbb{C}^-$. Pour ce faire, soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{H}$ et $\mathrm{Im}(q(z)) = -2xy = 0$. Alors, $x = 0$ et donc $\mathrm{Re}(q(z)) = y^2 > 0$, c.-à-d., il n'existe pas de point $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{H}$ t.q. $\mathrm{Im}(q(z)) = 0$ et $\mathrm{Re}(q(z)) \leq 0$, c.-à-d., on obtient $q(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{C}^-$. Mais q est également surjectif, c.-à-d., pour tout $w \in \mathbb{C}^-$, il existe $z \in \mathbb{H}$ t.q. $w = q(z) = -z^2$, parce que tout point dans $\mathbb{C}^-$ peut être atteint par une rotation et une dilatation d'un point dans $\mathbb{H}$ (utiliser p.ex. les coordonnées polaires).

En utilisant Rem. 2.26 *(a)*, on arrive à la conclusion.

(b) Nous notons que $p = q \circ h_{\tilde{C}}$ en $\mathbb{E}$ (cf. Dém. 2.32 pour $h_{\tilde{C}}$ et *(a)* pour q). En utilisant Rem. 2.26 *(b)*, on arrive à la conclusion.

□

Exercice 15. Soit $f_n : \mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{E} \to \mathbb{C}$ la suite de fonctions définie, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{E}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$f_n(z) := \frac{1}{1 + z^n}.$$

Montrer :

(a) Pour tout $0 < r < 1$, la suite converge uniformément vers 1 dans $B_r(0)$.

(b) Pour tout $R > 1$, la suite converge uniformément vers 0 dans $\mathbb{C} \setminus B_R(0)$.

(c) La suite ne converge pas uniformément dans $\mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{E}$.

Solution

(a) Soit $0 < r < 1$, $z \in B_r(0)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, en utilisant l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue, on peut faire l'estimation

$$|f_n(z) - 1| = \left| \frac{1}{1 + z^n} - 1 \right| = \frac{|z|^n}{|1 + z^n|} \leq \frac{|z|^n}{1 - |z|^n} \leq \frac{r^n}{1 - r^n}. \tag{1}$$

Il en résulte que

$$|f_n - 1|_{B_r(0)} = \sup_{z \in B_r(0)} |f_n(z) - 1| \leq \frac{r^n}{1 - r^n},$$

d'où alors $\lim_{n\to\infty} |f_n - 1|_{B_r(0)} = 0$. D'après Rem. 3.3 *(b)*, la suite converge uniformément vers 1 dans $B_r(0)$.

(b) Soit $R > 1$, $z \in \mathbb{C} \setminus B_R(0)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, en utilisant l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue, on a

$$|f_n(z)| = \frac{1}{|1 + z^n|} \leq \frac{1}{|z|^n - 1} \leq \frac{1}{R^n - 1}. \tag{2}$$

Il en résulte que

$$|f_n|_{\mathbb{C}\setminus B_R(0)} = \sup_{z\in\mathbb{C}\setminus B_r(0)} |f_n(z)| \leq \frac{1}{R^n - 1},$$

d'où alors $\lim_{n\to\infty} |f_n|_{\mathbb{C}\setminus B_R(0)} = 0$. D'après Rem. 3.3 *(b)*, la suite converge uniformément vers 0 dans $\mathbb{C} \setminus B_R(0)$.

(c) D'après (1), la suite converge ponctuellement vers 1 dans $B_1(0)$, mais $|f_n - 1|_{B_1(0)} = \sup_{z\in B_r(0)} |f_n(z) - 1| = \infty$ parce que, pour toute suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui tend vers une solution de $1 + z^n = 0$ (toute solution de cette équation se trouve sur le cercle unité), la valeur absolue $|f_n(z_k) - 1|$ ne reste pas borné si $k \to \infty$. D'après Rem. 3.3 *(b)*, la suite ne converge pas uniformément vers 1 dans $B_1(0)$.

□

Exercice 16. Soit $f_n : D \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions qui converge localement uniformément dans D. Alors, elle converge uniformément dans toute partie compacte de D.

Solution Soit $K \subseteq D$ une partie compacte de D. Comme, par hypothèse, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément dans D, tout point $x \in K$ possède un voisinage U de x dans D t.q. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément dans U. Comme tout U contient un ouvert $A \subseteq U$ (cf. Rap. 2.37), l'ensemble K est recouvert par tous ces A.
Ensuite, comme K est un compact, la propriété de Borel-Lebesgue (cf. le cours d'analyse) garantit qu'il existe un nombre fini de tels ouverts, notés $A_1, \ldots, A_N$, qui recouvrent K, c.-à-d., $K \subseteq \bigcup_{i=1}^N A_i$.
Alors, comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément dans tous les ouverts $A_1, \ldots, A_N$, elle converge uniformément dans $\bigcup_{i=1}^N A_i$ et donc, elle converge uniformément dans $K \subseteq \bigcup_{i=1}^N A_i$.

□