UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 5

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 17. Soit $f_n : D \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions, $A \subseteq D$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres non négatifs t.q.

$$|f_n|_A \leq M_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty.$$

Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément dans A (**Critère de Weierstrass**).

Solution Pour tout $n > m$ et tout $z \in A$, on a

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(z)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k.$$

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q., pour tout $n > m \geq N$, on a

$$\sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon.$$

Alors, pour tout $n > m \geq N$ et tout $z \in A$, on obtient

$$|f_{m+1}(z) + \ldots + f_n(z)| < \varepsilon,$$

c.-à-d., d'après le critère de Cauchy de Thm. 3.10, la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément dans A. $\square$

Exercice 18. Soit $D := \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\mu \,|\, \mu^2 \in \mathbb{N}^*\}$ et soit $f_n : D \to \mathbb{C}$ défini, pour tout $z \in D$, par

$$f_n(z) := \frac{(-1)^n}{z^2+n}.$$

Montrer :

(a) La série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformément dans $\mathbb{R}$.

(b) Elle ne converge absolument en aucun point de $\mathbb{R}$.

(c) Elle possède un réarrangement divergent.

Solution

(a) La démonstration est analogue à celle du critère de convergence des séries alternées (aussi appelé la règle de Leibniz, cf. le cours d'analyse).
Soit $S_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$ et $n > m$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a

$$S_n(z) - S_m(z) = \sum_{k=m+1}^{n} f_k(z) = \sum_{k=m+1}^{n} (-1)^k \underbrace{\frac{1}{z^2+k}}_{=:\, g_k(z) \geq 0} = (-1)^{m+1} T_{n,m}(z),$$

où, si $n-m$ est pair (et de manière analogue si $n-m$ est impair), nous pouvons écrire

$$T_{n,m}(z) := \underbrace{[g_{m+1}(z) - g_{m+2}(z)]}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{[g_{n-1}(z) - g_n(z)]}_{\geq 0} \qquad (1)$$

$$= g_{m+1}(z) - [g_{m+2}(z) - g_{m+3}(z)] - \ldots - [g_{n-2}(z) - g_{n-1}(z)] - g_n(z). \qquad (2)$$

Alors, d'après (1), on a $T_{n,m}(z) \geq 0$ et, d'après (2), on a $T_{n,m}(z) \leq g_{m+1}(z)$. Il en résulte que, pour tout $n > m$ et tout $z \in \mathbb{R}$,

$$|S_n(z) - S_m(z)| = T_{n,m}(z) \leq \frac{1}{z^2+m+1} \leq \frac{1}{m+1}.$$

D'après le critère de Cauchy de Thm. 3.10, la série converge uniformément dans $\mathbb{R}$.

(b) Comme, pour tout $z \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $z^2 + n \leq 2n$ pour tout $n \geq N$, on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2+n} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

(c) En utilisant le théorème de réarrangement (cf. Rap. 3.20), on arrive à la conclusion.

□

Exercice 19. Soit $f_n : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ défini, pour tout $z \in \mathbb{E}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$f_n(z) := \frac{z^{2n}}{1 - z^n}.$$

Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge normalement dans $\mathbb{E}$.

Solution Soit $c \in \mathbb{E}$. Alors, pour tout $r > 0$ t.q. $R := |c| + r < 1$ et tout $z \in B_r(c)$, on a

$$|f_n(z)| = \left| \frac{z^{2n}}{1 - z^n} \right| \leq \frac{|z|^{2n}}{1 - |z|^n} \leq \frac{R^{2n}}{1 - R^n}.$$

Comme $R < 1$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $R^n \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq N$. Il en résulte que $R^n/(1-R^n) \leq 1$ pour tout $n \geq N$ et donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|_{B_r(c)} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{R^{2n}}{1 - R^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} R^n < \infty,$$

c.-à-d., pour tout point $c \in \mathbb{E}$, il existe une voisinage $B_r(c) \subseteq \mathbb{E}$ t.q. $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|_{B_r(c)}$ converge. Alors, par définition, la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge normalement dans $\mathbb{E}$. $\square$

Exercice 20. Soit $w \in \mathbb{C}$ et $s > 0$ et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : B_s(w) \to \mathbb{C}$ t.q., pour tout $r > 0$ avec $r < s$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|_{B_r(w)} < \infty.$$

Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement dans $B_s(w)$.

Solution Soit $c \in B_s(w)$. Alors, pour $R := (s + |w - c|)/2 < s$, le disque $B_R(w) \subseteq B_s(w)$ est un voisinage de c et, d'après l'hypothèse, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|_{B_R(w)} < \infty,$$

c.-à-d., la série est normalement convergente dans $B_s(w)$. $\square$