UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 6

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2013–2014 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 21. Montrer que, si la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge au point $z_0 \neq 0$, elle converge normalement dans $B_{|z_0|}$.

Solution Comme la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ est convergente, on a $\lim_{n\to\infty} |a_n||z_0|^n = 0$. Alors, la suite $(|a_n||z_0|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, c.-à-d., il existe $M > 0$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n||z_0|^n \leq M$. En utilisant le lemme d'Abel (cf. Prop. 4.3), on obtient l'énoncé. $\square$

Exercice 22. Montrer que la série exponentielle et les séries trigonométriques sont holomorphes en $\mathbb{C}$ et qu'elles satisfont la formule d'Euler, c.-à-d., pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z).$$

Solution En utilisant la règle de d'Alembert de Prop. 4.9 pour la série exponentielle, on obtient

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Comme, pour tout $z \in \mathbb{C}$, les séries $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n}/(2n)!$ et $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n+1}/(2n+1)!$ sont des sous-séries de la série convergente $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n/n!$, les séries trigonométriques ont également un rayon de convergence infini. En plus, si on prend la limite $N \to \infty$ de la relation

$$\sum_{n=0}^{2N+1} \frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n} + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1},$$

on obtient la formule d'Euler. $\square$

Exercice 23. Montrer que, pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$, la série binomiale satisfait $b_\sigma \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ et que, pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$ et tout $z \in \mathbb{E}$, on a

$$b'_\sigma(z) = \sigma b_{\sigma-1}(z) = \frac{\sigma}{1+z}\, b_\sigma(z).$$

Solution Si $\sigma \in \mathbb{N}$, la série se réduit à un polynôme (cf. Rem. 4.13 *(a)*) et donc, $b_\sigma \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$. Si $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, on a $\binom{\sigma}{n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, comme, pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\binom{\sigma}{n+1} = \frac{\sigma - n}{n+1}\binom{\sigma}{n},$$

nous pouvons calculer que

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\sigma - n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\left|1-\frac{\sigma}{n}\right|} = 1.$$

Alors, $b_\sigma \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$. En plus, pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$ et tout $z \in \mathbb{E}$, on a

$$(1+z)b_{\sigma-1}(z) = b_\sigma(z),$$

parce que les coéfficients binomiaux satisfont, pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\binom{\sigma-1}{n} + \binom{\sigma-1}{n-1} = \binom{\sigma}{n}.$$

Finalement, comme les coéfficients binomiaux satisfont aussi, pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n\binom{\sigma}{n} = \sigma\binom{\sigma-1}{n-1},$$

nous obtenons pour la dérivée

$$b'_\sigma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\sigma}{n} z^{n-1} = \sigma\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\sigma-1}{n-1} z^{n-1} = \sigma b_{\sigma-1}(z).$$

$\square$

Exercice 24. Montrer que les séries exponentielles, logarithmiques et binomiales sont reliéesentre elles, c.-à-d., que, pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$ et tout $z \in \mathbb{E}$, on a

$$b_\sigma(z) = \mathrm{e}^{\sigma\lambda(z)}.$$

Montrer notamment que, pour $\sigma = 1$ et tout $z \in \mathbb{E}$, on a

$$\mathrm{e}^{\lambda(z)} = 1 + z.$$

Solution Posons $f(z) := b_\sigma(z)\mathrm{e}^{-\sigma\lambda(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{E}$. Alors, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$, et, pour tout $z \in \mathbb{E}$, on a

$$f'(z) = [b'_\sigma(z) - \sigma b_\sigma(z)\lambda'(z)]\mathrm{e}^{-\sigma\lambda(z)} = 0,$$

parce que $b'_\sigma - \sigma b_\sigma \lambda' = 0$. D'après Prop. 2.30, la fonction f est constante en $\mathbb{E}$. Si on utilise que $(\mathrm{e}^w)^{-1} = \mathrm{e}^{-w}$ pour tout $w \in \mathbb{C}$ (cf. Prop. 5.1), on arrive à la conclusion car $f(0) = 1$. $\square$