

## Fonctions analytiques – TD 7

W. Aschbacher (<http://aschbacher.univ-tln.fr/>)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

**Exercice 25.** Soit  $R$  le rayon de convergence et  $f$  la fonction limite de la série entière  $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ . Montrer :

- (a)  $R = 1$
- (b)  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$
- (c)  $f : \mathbb{E} \xrightarrow{\sim} f(\mathbb{E})$
- (d)  $f$  conserve les angles et l'orientation en  $\mathbb{E}$ .

**Exercice 26.** Soit  $D$  connexe et  $f \in \mathcal{O}(D)$ . Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

- (a) Il existe  $a, b \in \mathbb{C}$  t.q.  $f(z) = ae^{bz}$  pour tout  $z \in D$ .
- (b) Il existe  $b \in \mathbb{C}$  t.q.  $f'(z) = bf(z)$  pour tout  $z \in D$ .

**Exercice 27.** Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  t.q.  $\sin(z/2) \neq 0$ , on a

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kz) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right)}{2 \sin\left(\frac{z}{2}\right)}.$$

**Exercice 28.** Montrer que les fonctions trigonométriques ont les propriétés suivantes :

- (a)  $\sin$  et  $\cos$  admettent toute valeur dans  $\mathbb{C}$  un nombre infini dénombrable de fois.
- (b) L'ensemble des zéros de  $\sin$  est égal à  $\{m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\}$  et l'ensemble des zéros de  $\cos$  est égal à  $\{(m + \frac{1}{2})\pi \mid m \in \mathbb{Z}\}$ .
- (c)  $\text{per}(\sin) = \text{per}(\cos) = 2\pi\mathbb{Z}$