UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 8

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 29.

(a) Soit $\lambda_1 : B_1(1) \to \mathbb{C}$ la série logarithmique de centre 1, c.-à-d., la fonction définie par $\lambda_1(z) := \lambda(z-1)$ pour tout $z \in B_1(1)$. Montrer que λ_1 une fonction logarithmique dans $B_1(1)$.

(b) Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et soit $b \in \mathbb{C}$ un logarithme de a. Montrer que la fonction $\lambda_{a,b} : B_{|a|}(a) \to \mathbb{C}$ définie, pour tout $z \in B_{|a|}(a)$, par

$$\lambda_{a,b}(z) := b + \lambda_1\left(\frac{z}{a}\right),$$

est une fonction logarithmique dans $B_{|a|}(a)$.

Exercice 30. Montrer que la fonction $\arctan \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$, définie comme la fonction limite de la série arc tangente, satisfait, pour tout $z \in \mathbb{E}$,

$$\arctan(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \log\left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right).$$

Exercice 31. Soient $r \geq 0$ et $\mathbb{C}_r^{\pm} := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,|\, \pm x \geq r\}$. Déterminer la fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_1^+ \cap \mathbb{C}_1^-)$ t.q.

$$f(z)^2 = z^2 - 1, \qquad f(0) = \mathrm{i}.$$

Exercice 32. On peut montrer que la fonction de Joukovski satisfait $J : \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}_1^+ \cap \mathbb{C}_1^-$. Déterminer sa réciproque j.