UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 8

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 29.

(a) Soit $\lambda_1 : B_1(1) \to \mathbb{C}$ la série logarithmique de centre 1, c.-à-d., la fonction définie par $\lambda_1(z) := \lambda(z-1)$ pour tout $z \in B_1(1)$. Montrer que λ_1 une fonction logarithmique dans $B_1(1)$.

(b) Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et soit $b \in \mathbb{C}$ un logarithme de a. Montrer que la fonction $\lambda_{a,b} : B_{|a|}(a) \to \mathbb{C}$ définie, pour tout $z \in B_{|a|}(a)$, par

$$\lambda_{a,b}(z) := b + \lambda_1\left(\frac{z}{a}\right),$$

est une fonction logarithmique dans $B_{|a|}(a)$.

<u>Solution</u>

(a) D'après Ex. 4.17 *(d)*, on a $\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ et $\lambda'(z) = 1/(1+z)$ pour tout $z \in \mathbb{E}$. Alors, comme $\lambda_1(z) = \lambda(z-1)$, on obtient $\lambda_1 \in \mathcal{O}(B_1(1))$ et

$$\lambda_1'(z) = \frac{1}{z}.$$

En plus, comme $\lambda_1(1) = \lambda(0) = 0$, on a $\exp(\lambda_1(1)) = 1$. En utilisant Prop. 5.12, on arrive à la conclusion.

(b) La fonction $\lambda_{a,b}$ a les propriétés $\lambda_{a,b} \in \mathcal{O}(B_{|a|}(a))$ et, pour tout $z \in B_{|a|}(a)$,

$$\lambda_{a,b}'(z) = \frac{1}{z}.$$

En plus, comme $\lambda_{a,b}(a) = b$, on a $\exp(\lambda_{a,b}(a)) = \exp(b) = a$. Alors, en utilisant Prop. 5.12, on arrive à la conclusion.

□

Exercice 30. Montrer que la fonction $\arctan \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$, définie comme la fonction limite de la série arc tangente, satisfait, pour tout $z \in \mathbb{E}$,

$$\arctan(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \log\left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right).$$

<u>Solution</u>

Indication : Utiliser la réciproque de la transformation de Cayley et construire une fonction de dérivée zéro.

Soit $h : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ défini, pour tout $z \in \mathbb{E}$, par

$$h(z) := -\mathrm{i}h_{\tilde{C}}(\mathrm{i}z) = \frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z},$$

où $h_{\tilde{C}}$ est la réciproque de la transformation de Cayley (cf. Prop. 2.32). Comme $h_{\tilde{C}} : \mathbb{E} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$, c.-à-d., notamment, comme $h_{\tilde{C}}(\mathbb{E}) = \mathbb{H}$, on obtient $h(\mathbb{E}) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Alors, la fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$, définie, pour tout $z \in \mathbb{E}$, par

$$f(z) := \log(h(z)) - 2\mathrm{i}\arctan(z),$$

est bien définie (c.-à-d., l'image de $\mathbb{E}$ par h est un sous-ensemble du domaine de définition de $\log$). En plus, pour tout $z \in \mathbb{E}$, on a

$$f'(z) = \frac{h'(z)}{h(z)} - 2\mathrm{i}\arctan'(z) = \frac{2\mathrm{i}}{1+z^2} - 2\mathrm{i}\,\frac{1}{1+z^2} = 0,$$

où nous avons utilisé Ex. 4.17 *(e)* pour la dérivée de la série arc tangente. Alors, d'après Prop. 2.30, comme $\mathbb{E}$ est connexe et $f(0) = 0$, on arrive à la conclusion. □

Exercice 31. Soient $r \geq 0$ et $\mathbb{C}_r^{\pm} := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,|\, \pm x \geq r\}$. Déterminer la fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_1^+ \cap \mathbb{C}_1^-)$ t.q.

$$f(z)^2 = z^2 - 1, \qquad f(0) = \mathrm{i}.$$

<u>Solution</u>

Indication : Poser $f_1(z) := \exp(\frac{1}{2}\log(z+1))$ pour tout $z \in \mathbb{C}_1^-$ et $f_2(z) := \exp(\frac{1}{2}l(z-1))$ pour tout $z \in \mathbb{C}_1^+$, où l est une fonction logarithmique dans $\mathbb{C}_0^+$. Considérer $f = f_1 f_2$.

Soit $D := \mathbb{C}_1^+ \cap \mathbb{C}_1^-$. Motivés par l'indication, nous définissons la fonction $f \in \mathcal{O}(D)$, pour tout $z \in D$, par

$$f(z) := f_1(z) f_2(z).$$

Alors, nous obtenons, pour tout $z \in D$, que

$$f(z)^2 = f_1(z)^2 f_2(z)^2 = \mathrm{e}^{\log(z+1)}\mathrm{e}^{l(z-1)} = (z+1)(z-1) = z^2 - 1.$$

En plus, nous pouvons calculer

$$f(0) = f_2(0) = \mathrm{e}^{\frac{l(-1)}{2}}.$$

Comme $[\exp(\frac{1}{2}l(-1))]^2 = \exp(l(-1)) = -1$, on a $\exp(\frac{1}{2}l(-1)) \in \{\pm\mathrm{i}\}$. Si $\exp(\frac{1}{2}l(-1)) = \mathrm{i}$, on obtient l'énoncé. Si $\exp(\frac{1}{2}l(-1)) = -\mathrm{i}$, nous utilisons Prop. 5.11 qui nous garantit que toutes le fonctions logarithmiques sur $\mathbb{C}_0^+$ ont la forme $l + 2\pi\mathrm{i}m$ pour $m \in \mathbb{Z}$. En choisissant la branche avec $m = 1$, on obtient alors

$$\mathrm{e}^{\frac{l(-1)+2\pi\mathrm{i}}{2}} = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = \mathrm{i}.$$

Remarque : On peut définir une fonction logarithmique dans $\mathbb{C}_0^+$ par

$$z \mapsto \log(-z) + \mathrm{i}\pi.$$

Afin de traiter la question de l'unicité, soit $g \in \mathcal{O}(D)$ également t.q. $g(z)^2 = z^2 - 1$ pour tout $z \in D$ et $g(0) = \mathrm{i}$. Alors, comme $f, g \in C(D)$ ne s'annulent nulle part en D, comme $h := f/g$ satisfait $h(D) \subseteq \{\pm 1\}$ et comme D est connexe, on obtient que $h(z) = h(0) = f(0)/g(0) = 1$ pour tout $z \in D$. □

Exercice 32. On peut montrer que la fonction de Joukovski satisfait $J : \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}_1^+ \cap \mathbb{C}_1^-$. Déterminer sa réciproque j.

Solution

Indication : Utiliser Exr. 31.

Soit $D := \mathbb{C}_1^+ \cap \mathbb{C}_1^-$. La bijection réciproque $j \in \mathcal{O}(D)$ satisfait $z = J(j(z)) = [j(z) + 1/j(z)]/2$ pour tout $z \in D$, d'où on obtient, pour tout $z \in D$,

$$(j(z) - z)^2 = z^2 - 1.$$

En plus, comme $J(\mathrm{i}) = 0$, on a $j(z) - z = \mathrm{i}$ pour $z = 0$. Alors, en utilisant Exr. 31, on trouve

$$j(z) = z + f(z),$$

où, pour tout $z \in D$, on a

$$f(z) = \underbrace{\mathrm{e}^{\frac{\log(1+z)}{2}}}_{=f_1(z)} \underbrace{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\frac{\log(1-z)}{2}}}_{=f_2(z)},$$

et nous avons utilisé la forme de f_2 donnée dans la remarque de la solution de Exr. 31. □