UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 9

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 33. Montrer :

(a) $1^\sigma = 1$ pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$

(b) $\mathrm{i}^\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$

(c) $|z^\sigma| \leq |z|^{\mathrm{Re}(\sigma)} \mathrm{e}^{\pi|\mathrm{Im}(\sigma)|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^-$ et tout $\sigma \in \mathbb{C}$

(d) Pour tout $z \in \mathbb{E}$ et tout $\sigma \in \mathbb{C}$, on a la **formule de Newton-Abel**, c.-à-d.,

$$(1+z)^\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\sigma}{n} z^n.$$

Exercice 34. La **fonction** ζ **de Riemann** est donnée par

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Montrer :

(a) Elle converge uniformément dans $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) \geq 1 + \varepsilon\}$ pour tout $\varepsilon > 0$.

(b) Elle converge normalement dans $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 1\}$.

Exercice 35. Soit $D := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1 \text{ et } \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) > 1\}$. Construire une courbe γ qui parcourt le bord de D dans le sens positif et calculer :

(a) $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{d}z\, \bar{z}$

(b) $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{d}z\, \mathrm{Im}(z)$

Exercice 36. Soient $\gamma_1 \in C^1(I_1)$ et $\gamma_2 \in C^1(I_2)$ des courbes équivalentes et $f \in C(|\gamma_1|)$. Montrer :

$$\int_{\gamma_1} \mathrm{d}z\, f(z) = \int_{\gamma_2} \mathrm{d}z\, f(z)$$