UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 9

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 33. Montrer :

(a) $1^\sigma = 1$ pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$

(b) $\mathrm{i}^\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$

(c) $|z^\sigma| \leq |z|^{\mathrm{Re}(\sigma)}\mathrm{e}^{\pi|\mathrm{Im}(\sigma)|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^-$ et tout $\sigma \in \mathbb{C}$

(d) Pour tout $z \in \mathbb{E}$ et tout $\sigma \in \mathbb{C}$, on a la **formule de Newton-Abel**, c.-à-d.,

$$(1+z)^\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\sigma}{n} z^n.$$

Solution

(a) On a $1^\sigma = \mathrm{e}^{\sigma \log(1)} = 1$ pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$.

(b) Nous pouvons écrire

$$\mathrm{i}^\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\log(\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ln(|\mathrm{i}|)+\mathrm{i}\frac{\pi}{2})} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \cong 0.2078\ldots .$$

(c) Pour tout $z = |z|\exp(\mathrm{i}\varphi) \in \mathbb{C}^-$ avec $-\pi < \varphi < \pi$ et tout $\sigma \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}|z^\sigma| &= \left|\mathrm{e}^{\sigma\log(z)}\right| = \left|\mathrm{e}^{\sigma(\ln(|z|)+\mathrm{i}\varphi)}\right| = \left|\mathrm{e}^{(\mathrm{Re}(\sigma)+\mathrm{i}\mathrm{Im}(\sigma))(\ln(|z|)+\mathrm{i}\varphi)}\right| = |z|^{\mathrm{Re}(\sigma)}\mathrm{e}^{-\varphi\mathrm{Im}(\sigma)}\\ &\leq |z|^{\mathrm{Re}(\sigma)}\mathrm{e}^{\pi|\mathrm{Im}(\sigma)|}.\end{aligned}$$

(d) *Indication :* Utiliser Rem. 4.18.
D'après Thm. 5.17 *(b)*, on a $\log(1+z) = \lambda_1(1+z) = \lambda(z)$ pour tout $z \in \mathbb{E}$. Alors, en utilisant Rem. 4.18, on a, pour tout $z \in \mathbb{E}$ et tout $\sigma \in \mathbb{C}$,

$$(1+z)^\sigma = \mathrm{e}^{\sigma\log(1+z)} = \mathrm{e}^{\sigma\lambda(z)} \overset{\text{Rem. 4.18}}{=} b_\sigma(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\sigma}{n}z^n.$$

□

Exercice 34. La **fonction ζ de Riemann** est donnée par

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Montrer :

(a) Elle converge uniformément dans $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) \geq 1 + \varepsilon\}$ pour tout $\varepsilon > 0$.

(b) Elle converge normalement dans $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 1\}$.

Solution

(a) Soit $\varepsilon > 0$ et $A := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) \geq 1 + \varepsilon\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in A$, on a

$$|n^z| = \left|\mathrm{e}^{z \log(n)}\right| = \left|\mathrm{e}^{(\mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(z)) \log(n)}\right| = n^{\mathrm{Re}(z)} \geq n^{1+\varepsilon}.$$

Alors, pour $f_n(z) := 1/n^z$, on a $|f_n(z)| \leq 1/n^{1+\varepsilon}$ pour tout $z \in A$, d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|f_n|_A \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}.$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < \infty$, le critère de Weierstrass (cf. Thm. 3.11) fournit que ζ converge uniformément dans A.

(b) Soit $D := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 1\}$. Nous rappelons qu'une série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ de fonctions $f_n : D \to \mathbb{C}$ converge normalement dans D si tout point de D possède un voisinage $U \subseteq D$ t.q. $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|_U < \infty$ (cf. Déf. 3.12). Soit donc $z \in D$ et posons $\varepsilon := (\mathrm{Re}(z) - 1)/2 > 0$ et $U := B_\varepsilon(z) \subseteq D$. Alors, comme $\mathrm{Re}(z) \geq 1 + \varepsilon$ pour tout $z \in U$, nous obtenons $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|_U < \infty$ en utilisant *(a)*.

$\square$

Exercice 35. Soit $D := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1 \text{ et } \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) > 1\}$. Construire une courbe γ qui parcourt le bord de D dans le sens positif et calculer :

(a) $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{d}z\, \bar{z}$

(b) $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{d}z\, \mathrm{Im}(z)$

Solution Soient les courbes $\gamma_1 : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ définies par

$$\gamma_1(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad \gamma_2(t) := [\mathrm{i}, 1](t) = (1-t)\mathrm{i} + t = (1 - \mathrm{i})t + \mathrm{i}.$$

(a) Nous calculons

$$\int_\gamma \mathrm{d}z\, \bar{z} = \sum_{i=1}^{2} \int_{I_i} \mathrm{d}t\, \overline{\gamma_i(t)}\, \gamma_i'(t) = \mathrm{i} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + (1 - \mathrm{i}) \int_0^1 \mathrm{d}t\, [(1+\mathrm{i})t - \mathrm{i}]$$
$$= \mathrm{i}\,\frac{\pi}{2} + (1 - \mathrm{i}) \left(\frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}) - \mathrm{i}\right) = \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

(b) Nous calculons

$$\int_\gamma \mathrm{d}z\,\mathrm{Im}(z) = \sum_{i=1}^{2} \int_{I_i} \mathrm{d}t\,\mathrm{Im}[\gamma_i(t)]\,\gamma_i'(t) = \mathrm{i}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t\ \sin(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + (1-\mathrm{i})\int_0^1 \mathrm{d}t\,(1-t)$$
$$= \mathrm{i}\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}} - t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (1-\mathrm{i})\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right).$$

□

Exercice 36. Soient $\gamma_1 \in C^1(I_1)$ et $\gamma_2 \in C^1(I_2)$ des courbes équivalentes et $f \in C(|\gamma_1|)$. Montrer :

$$\int_{\gamma_1} \mathrm{d}z\,f(z) = \int_{\gamma_2} \mathrm{d}z\,f(z)$$

<u>Solution</u> Comme γ_1 et γ_2 sont équivalents (cf. Déf. 6.7), il existe une bijection $\varphi : I_2 \to I_1$ avec $\varphi' > 0$ t.q. $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ et donc, on a, pour tout $t \in I_2$,

$$\gamma_2'(t) = \gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Alors, nous pouvons écrire

$$\int_{\gamma_2} \mathrm{d}z\,f(z) = \int_{a_2}^{b_2} \mathrm{d}t\,f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t) = \int_{a_2}^{b_2} \mathrm{d}t\,f(\gamma_1(\varphi(t)))\gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t)$$
$$\overset{s\,=\,\varphi(t)}{=} \int_{\varphi(a_2)}^{\varphi(b_2)} \mathrm{d}s\,f(\gamma_1(s))\gamma_1'(s) = \int_{a_1}^{b_1} \mathrm{d}s\,f(\gamma_1(s))\gamma_1'(s) = \int_{\gamma_1} \mathrm{d}z\,f(z),$$

où nous avons utilisé que $\varphi(a_2) = a_1$ et $\varphi(b_2) = b_1$. □