

Fonctions analytiques – TD 10

W. Aschbacher (<http://aschbacher.univ-tln.fr/>)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 37. Soient $r, s > 0$ fixés et $\gamma := [-r - is, r - is] + [r - is, r + is] + [r + is, -r + is] + [-r + is, -r - is]$. Montrer :

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

Exercice 38.

(a) Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ une courbe, $-\gamma$ la courbe inversée et $f \in C(|\gamma|)$. Montrer :

$$\int_{-\gamma} dz f(z) = - \int_{\gamma} dz f(z)$$

(b) Soit $g : D_2 \rightarrow D_1$ holomorphe et g' continu. En plus, soit γ_2 une courbe dans D_2 , $\gamma_1 := g \circ \gamma_2$ et $f \in C(|\gamma_1|)$. Montrer :

$$\int_{\gamma_1} dz f(z) = \int_{\gamma_2} dz f(g(z))g'(z)$$

Exercice 39. Soit $F \in \mathcal{O}(D)$ et $F' = 0$ dans D . Montrer que F est localement constant.

Exercice 40. Soit $D := \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ et soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ défini, pour tout $z \in D$, par

$$f(z) := \frac{1}{z(z-1)}.$$

Montrer que, pour toute courbe fermée γ dans D , on a

$$\int_{\gamma} dz f(z) = 0.$$