

Fonctions analytiques – TD 11

W. Aschbacher (<http://aschbacher.univ-tln.fr/>)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 41. Soit p le polynôme défini par $p(z) := a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. En plus, soit $c \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Montrer :

$$\int_{\partial B_r(c)} dz \overline{p(z)} = 2\pi i r^2 \overline{p'(c)}$$

Exercice 42. Soient $c \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, et soit $z \in B_r(c)$ fixé. Montrer :

$$\int_{\partial B_r(c)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$$

Exercice 43. Pour tout $z \in \mathbb{C}^-$, la fonction $F : \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par

$$F(z) := \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Montrer :

- (a) F est une primitive de $1/z$ dans \mathbb{C}^- .
- (b) Le théorème intégral de Cauchy implique que $F = \log$.

Exercice 44.

(a) Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $|a| \leq 1$. Montrer :

$$\int_0^\infty dt e^{-(1+ia)^2 t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1-ia}{1+a^2}$$

(b) (**Intégrales de Fresnel**) Montrer : $\int_0^\infty dt \cos(t^2) = \int_0^\infty dt \sin(t^2) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$