UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 11

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 41. Soit p le polynôme défini par $p(z) := a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. En plus, soit $c \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Montrer :

$$\int_{\partial B_r(c)} \mathrm{d}z\, \overline{p(z)} = 2\pi \mathrm{i} r^2\, \overline{p'(c)}$$

Solution Pour paramétrer $\partial B_r(c)$, nous choisissons le paramétrage $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) := c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Comme l'intégrale curviligne est linéaire (cf. Prop. 6.9 *(a)*), il suffit d'intégrer le k-ième terme du polynôme p. Alors, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on calcule

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_r(c)} \mathrm{d}z\ \bar{z}^k &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \overline{\gamma(t)}^k \gamma'(t) = \mathrm{i}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, (\bar{c} + r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \\
&= \mathrm{i}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \left(\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} [\bar{c}]^{k-l} r^l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}lt} \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{i}r \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} [\bar{c}]^{k-l} r^l \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(l-1)t}}_{= 2\pi\delta_{l,1}} \\
&= 2\pi \mathrm{i} r \binom{k}{1} [\bar{c}]^{k-1} r = 2\pi \mathrm{i} r^2 k [\bar{c}]^{k-1} = 2\pi \mathrm{i} r^2 \overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=c} z^k}.
\end{aligned}$$

$\square$

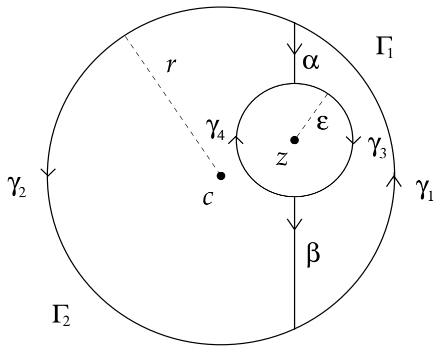
Exercice 42. Soient $c \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, et soit $z \in B_r(c)$ fixé. Montrer :

$$\int_{\partial B_r(c)} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = 2\pi \mathrm{i}$$

Solution *Indication :* Introduire un cercle centré à z et utiliser le théorème intégral de Cauchy (cf. Thm. 7.2).

Soit $B := B_r(c)$, $z \in B$ fixé et soit $\varepsilon > 0$ t.q. $\overline{B_\varepsilon(z)} \subseteq B$. Ensuite, nous relions le cercle $\partial B_\varepsilon(z)$ avec ∂B par des chemins α et β qui descendent verticalement, et nous appelons γ_1 le chemin sur ∂B qui monte à droite, γ_2 le chemin sur ∂B qui descend à gauche, γ_3 le chemin sur $\partial B_\varepsilon(z)$ qui descend à droite et γ_4 le chemin sur $\partial B_\varepsilon(z)$ qui monte à gauche. En plus, nous posons

$$\Gamma_1 := \gamma_1 + \alpha + \gamma_3 + \beta, \qquad \Gamma_2 := -\beta + \gamma_4 - \alpha + \gamma_2.$$



Comme la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{z\} \to \mathbb{C}$ définie par $f(\zeta) := 1/(\zeta - z)$ pour tout $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ (ce qui n'est pas un domaine étoilé), f est notamment holomorphe dans $z + \mathbb{C}^- := \{z + w \,|\, w \in \mathbb{C}^-\}$ (ce qui est un domaine étoilé). Comme Γ_1 est une courbe fermée, le théorème intégral de Cauchy fournit

$$\int_{\Gamma_1} \mathrm{d}z\, f(z) = 0.$$

De manière analogue (c.-à-d., en utilisant $z - \mathbb{C}^- := \{z - w \,|\, w \in \mathbb{C}^-\}$), on obtient également $\int_{\Gamma_2} \mathrm{d}z\, f(z) = 0$. Il en résulte que

$$0 = \int_{\Gamma_1} \mathrm{d}\zeta\, f(\zeta) + \int_{\Gamma_2} \mathrm{d}\zeta\, f(\zeta) = \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \mathrm{d}\zeta\, f(\zeta) = \int_{\partial B} \mathrm{d}\zeta\, f(\zeta) - \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \mathrm{d}\zeta\, f(\zeta).$$

Nous avons donc réduit le problème du calcul de l'intégral le long de ∂B au calcul de l'intégrale le long d'un cercle de centre z contenu dans B. D'après Thm. 6.6, cette dernière intégrale est égale à $2\pi\mathrm{i}$. □

Exercice 43. Pour tout $z \in \mathbb{C}^-$, la fonction $F : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ est définie par

$$F(z) := \int_{[1,z]} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}.$$

Montrer :

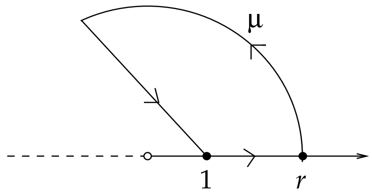
(a) F est une primitive de $1/z$ dans $\mathbb{C}^-$.

(b) Le théorème intégral de Cauchy implique que $F = \log$.

Solution

(a) D'après Ex. 6.19 *(b)*, l'ensemble $\mathbb{C}^-$ est étoilé et le point $1 \in \mathbb{C}^-$ est un centre de $\mathbb{C}^-$. Alors, comme la fonction $f(z) := 1/z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}^-$, le théorème intégral de Cauchy pour les domaines étoilés (cf. Thm. 7.2) nous fournit que f est $\mathbb{C}$-intégrable dans $\mathbb{C}^-$ et que F est une primitive de f dans $\mathbb{C}^-$.

(b) *Indication :* Utiliser $[1,r]$ et un arc de cercle de point d'arrivée $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.
Pour tout $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ avec $0 \leq \varphi < \pi$, on pose $\gamma := [1,r] + \mu$, où on définit $\mu : [0,\varphi] \to \mathbb{C}$ par $\mu(t) := r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ (et de manière analogue si $-\pi < \varphi < 0$).



Alors, comme $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^-)$, le théorème intégral de Cauchy implique que

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\gamma-[1,z]} \mathrm{d}\zeta\, f(\zeta) = \int_{[1,r]} \mathrm{d}\zeta\, f(\zeta) + \int_{\mu} \mathrm{d}\zeta\, f(\zeta) - \int_{[1,z]} \mathrm{d}\zeta\, f(\zeta) \\ &= \underbrace{\int_1^r \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{=\log(r)} + \underbrace{\int_0^{\varphi} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}}_{=\mathrm{i}\varphi} - \underbrace{\int_{[1,z]} \mathrm{d}\zeta\, f(\zeta),}_{=F(z)}\end{aligned}$$

c.-à-d., pour tout $z \in \mathbb{C}^-$, on obtient

$$F(z) = \log(z).$$

□

Exercice 44.

(a) Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $|a| \leq 1$. Montrer :

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}a)^2 t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1-\mathrm{i}a}{1+a^2}$$

(b) **(Intégrales de Fresnel)** Montrer : $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{d}t\, \cos(t^2) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}t\, \sin(t^2) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Solution

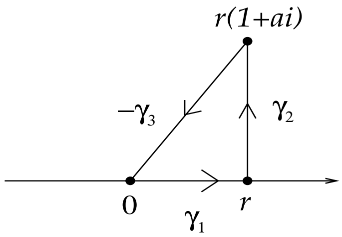
(a) *Indication :* Utiliser le théorème intégral de Cauchy (cf. Thm. 7.2) pour $|[0,r] + [r, r(1+\mathrm{i}a)] - [0, r(1+\mathrm{i}a)]|$ et que $\lim_{r\to\infty} \int_0^r \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-t^2} = \sqrt{\pi}/2$.

Si $a = 0$, on obtient l'énoncé en utilisant l'indication $\int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-t^2} = \sqrt{\pi}/2$. Soit donc $a > 0$ et soit la fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ définie, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par

$$f(z) := \mathrm{e}^{-z^2}.$$

En plus, pour $r > 0$, soient les courbes $\gamma_1 : [0, r] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [0, ar] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_3 : [0, r] \to \mathbb{C}$ définies, pour tout t dans les domaines de définition respectifs, par

$$\gamma_1(t) := t, \qquad \gamma_2(t) := r + \mathrm{i}t, \qquad \gamma_3(t) := (1 + \mathrm{i}a)t.$$



Alors, d'après le théorème intégral de Cauchy, on a $\int_{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3} \mathrm{d}z\, f(z) = 0$, c.-à-d.,

$$\underbrace{(1 + \mathrm{i}a) \int_0^r \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}a)^2 t^2}}_{= \int_{\gamma_3} \mathrm{d}z\, f(z)} = \underbrace{\int_0^r \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-t^2}}_{= \int_{\gamma_1} \mathrm{d}z\, f(z)} + \underbrace{\int_0^{ar} \mathrm{d}t\ \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-(r+\mathrm{i}t)^2}}_{= \int_{\gamma_2} \mathrm{d}z\, f(z)}.$$

Il nous reste à montrer que $\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_2} \mathrm{d}z\, f(z) = 0$. Pour ce faire, nous notons que, pour $0 \le t \le ar \le r$ (comme $a \le 1$), on peut écrire $\mathrm{e}^{t^2} \le \mathrm{e}^{rt}$ et donc,

$$\left| \int_{\gamma_2} \mathrm{d}z\, f(z) \right| \le \int_0^{ar} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-r^2+t^2} \le \mathrm{e}^{-r^2} \underbrace{\int_0^r \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{rt}}_{= \left[\frac{\mathrm{e}^{rt}}{r}\right]_0^r} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-r^2}}{r} \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Le cas de $a < 0$ se traite de manière analogue.

(b) En posant $a = 1$, en prenant la partie réelle et imaginaire de la formule dans *(a)* et en substituant $s = \sqrt{2}t$, on obtient l'énoncé.

□