UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

# *Fonctions analytiques – TD 14*

---

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

**M65 L3** Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

*Licence Mathématiques*

---

**Exercice 53.** Soit $D$ un connexe t.q. $D = \{\bar{z} \,|\, z \in D\}$ et $D \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ et soit $f \in \mathcal{O}(D)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

*(a)* $f(D \cap \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$

*(b)* $f(\bar{z}) = \bar{f}(z)$ pour tout $z \in D$

Solution *Indication* : Utiliser le théorème d'identité (cf. Thm. 8.1).

*(a)* $\Rightarrow$ *(b)* : Soient les fonctions $f_1, f_2 : D \to \mathbb{C}$ définies par $f_1(z) := f(z)$ et $f_2(z) := \bar{f}(\bar{z})$ pour tout $z \in D$. Comme $f \in \mathcal{O}(D)$, pour tout point $c \in D$, on a $f(z) = f(\bar{c}) + (z - \bar{c})g(z)$ pour tout $z \in D$ et la fonction $g : D \to \mathbb{C}$ est continue en $\bar{c}$. Alors, on obtient que

$$f_2(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{f(\bar{c}) + (\bar{z} - \bar{c})g(\bar{z})} = f_2(c) + (z - c)\bar{g}(\bar{z}).$$

En plus, la fonction $\tilde{g} : D \to \mathbb{C}$, définie par $\tilde{g}(z) := \bar{g}(\bar{z})$ pour tout $z \in D$, est continue en $c$ car, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q., pour tout $|z - c| = |\bar{z} - \bar{c}| < \delta$, on a

$$|\tilde{g}(z) - \tilde{g}(c)| = |g(\bar{z}) - g(\bar{c})| < \varepsilon,$$

d'où, alors, $f_2 \in \mathcal{O}(D)$. Ensuite, comme $D \cap \mathbb{R}$ est non vide et comme $D$ est ouvert, il existe $r \in D \cap \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ t.q. $(r - \alpha, r + \alpha) \subseteq D \cap \mathbb{R}$. En plus, on a, pour tout $z \in (r - \alpha, r + \alpha)$,

$$f_1(z) = f_2(z).$$

Alors, comme l'ensemble de coïncidence possède un point d'accumulation, le théorème d'indentité fournit l'énoncé.

*(b)* $\Rightarrow$ *(a)* : Soit $z \in D \cap \mathbb{R}$. Alors, on a $f(z) = f(\bar{z}) = \bar{f}(z) = \overline{f(z)}$, c.-à-d., $f(z) \in \mathbb{R}$. $\square$

**Exercice 54.** Soient $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ avec $g^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ t.q., pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$|f(z)| \leq |g(z)|.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $f(z) = \lambda g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Solution *Indication* : Utiliser le théorème de Liouville (cf. Thm. 8.6).

La fonction $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, définie par $h(z) := f(z)/g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, satisfait $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|h(z)| \leq 1.$$

Alors, le théorème de Liouville implique que $h$ est constant. □

**Exercice 55.** Montrer :

*(a)* **(Principe du minimum)** Soit $D$ connexe et $f \in \mathcal{O}(D)$. En plus, soit $c \in D$ et $U$ un voisinage de $c$ t.q.

$$|f(c)| = \inf_{z \in U} |f(z)|.$$

Alors, ou bien $f(c) = 0$, ou bien $f$ est constant dans $D$.

*(b)* **(Principe du minimum pour des bornés)** Soit $D$ connexe et borné et soit $f \in C(\overline{D}) \cap \mathcal{O}(D)$. Alors, ou bien $f$ a des zéros en $D$, ou bien $|f|$ admet son minimum sur le bord de $D$, c.-à-d., pour tout $z \in \overline{D}$, on a

$$|f(z)| \geq \min_{w \in \partial D} |f(w)|.$$

Solution

*(a)* Soit $g : D \setminus f^{-1}(\{0\}) \to \mathbb{C}$ défini par $g(z) := 1/f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus f^{-1}(\{0\})$. Si $c \in f^{-1}(\{0\})$, on a $f(c) = 0$. Si $c \notin f^{-1}(\{0\})$, on a

$$|g(c)| = \frac{1}{|f(c)|} = \frac{1}{\inf_{z \in U} |f(z)|} = \sup_{z \in U} \frac{1}{|f(z)|} = \sup_{z \in U} |g(z)|.$$

Alors, d'après le principe du maximum (cf. Thm. 8.14), $g$ est constant dans $D$ et donc, $f$ l'est également.

*(b)* Comme $|f| \in C(\overline{D})$ et comme $\overline{D}$ est compact, $|f|$ admet un minimum dans $\overline{D}$, c.-à-d., il existe $c \in \overline{D}$ t.q.

$$|f(c)| = \min_{z \in \overline{D}} |f(z)|.$$

Si $c \in f^{-1}(\{0\})$, alors $f$ a des zéros dans $D$ ou $|f|$ admet son minimum sur le bord de $D$. Si $c \notin f^{-1}(\{0\})$ et $c \in D$, alors, d'après *(a)*, $f$ est constant dans $\overline{D}$ et on a $|f(z)| \geq \min_{w \in \partial D} |f(w)|$ pour tout $z \in \overline{D}$. Si $c \notin f^{-1}(\{0\})$ et $c \in \partial D$, on a également $|f(z)| \geq \min_{z \in \partial D} |f(z)|$.

$\square$

**Exercice 56.** Soit $D$ connexe et borné et soient $f, g \in C(\overline{D}) \cap \mathcal{O}(D)$ avec $f^{-1}(\{0\}) = g^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ t.q., pour tout $z \in \partial D$, on a

$$|f(z)| = |g(z)|.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = 1$ t.q. $f(z) = \lambda g(z)$ pour tout $z \in \overline{D}$.

Solution *Indication* : Utiliser les principes du maximum et du minimum (cf. Thm. 8.14, 8.15 et Exr. 55).

La fonction $h : \overline{D} \to \mathbb{C}$, définie par $h(z) := f(z)/g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, a la propriété que $h \in C(\overline{D}) \cap \mathcal{O}(D)$. En plus, pour tout $z \in \partial D$, on a

$$|h(z)| = 1.$$

Alors, d'après le principe du maximum pour des bornés, on a $|h(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \overline{D}$. Mais, d'après le principe du minimum pour des bornés, on a également $|h(z)| \geq 1$ pour tout $z \in \overline{D}$. Il en résulte que $|h(z)| = 1$ pour tout $z \in \overline{D}$ et donc, d'après le principe du maximum, on a que $h$ est constant dans $D$. Comme $h \in C(\overline{D})$, on obtient que $h$ est constant dans $\overline{D}$, c.-à-d., il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $h(z) = \lambda$ pour tout $z \in \overline{D}$. Comme $|h(z)| = 1$ pour tout $z \in \overline{D}$, on arrive à $|\lambda| = 1$. $\square$