UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 15

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 57. Soit D connexe et soit $f \in \mathcal{O}(D)$ une fonction non constante dans D. Montrer que l'image $f(D)$ est un ouvert non vide et connexe.

Solution *Indications* : Pour montrer que $f(D)$ est ouvert, utiliser le théorème d'identité (cf. Thm. 8.1) et le théorème de l'image ouverte (cf. Thm. 8.12).

(a) Comme, d'après l'hypothèse, f est non constant dans D, le théorème d'identité implique que f est nulle part localement constant dans D. Alors, d'après le théorème de l'image ouverte, l'image $f(U)$ est ouverte pour tout ouvert $U \subseteq D$, et donc, notamment, pour $U = D$.

(b) Comme D est non vide, $f(D)$ l'est également.

(c) On veut montrer que $f(D)$ est connexe. Pour ce faire, soient $p, q \in f(D)$. Alors, par définition de $f(D)$, il existe $z, w \in D$ t.q. $p = f(z)$ et $q = f(w)$. Comme D est connexe, il existe un chemin $\gamma \in C([0,1], D)$ avec $\gamma(0) = z$ et $\gamma(1) = w$. Comme f est continu, il s'ensuit que l'application $\tilde{\gamma} : [0,1] \to f(D)$, définie par $\tilde{\gamma}(t) := f(\gamma(t))$ pour tout $t \in [0,1]$, est un chemin dans $f(D)$ qui relie p et q.

$\square$

Exercice 58. Soit $f \in \mathcal{O}(D)$ injectif. Montrer :

$$f : D \xrightarrow{\sim} f(D)$$

Solution *Indication* : Utiliser le théorème de l'image ouverte (cf. Thm. 8.12), le théorème d'identité (cf. Thm. 8.1) et le théorème de prolongement de Riemann (cf. Rem. 9.4).

(a) Comme f est injectif, f est nulle part localement constant dans D. Alors, d'après le théorème de l'image ouverte, f est une application ouverte, c.-à-d., notamment, que $f(D)$ est un ouvert. En plus, comme D est non vide, $f(D)$ l'est également.

(b) Comme, par hypothèse, $f : D \to f(D)$ est injectif, f possède une réciproque

$$f^{-1} : f(D) \to D.$$

En plus, comme f est ouvert, f^{-1} est continue parce que pour tout ouvert U dans D, l'image réciproque de l'application réciproque

$$[f^{-1}]^{-1}(U) = \{w \in f(D) \,|\, f^{-1}(w) \in U\} = f(U)$$

est ouverte dans $f(D)$ (où nous avons utilisé le fait du cours d'analyse qu'une application est continue ssi l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert).

(c) Comme f est nulle part localement constant, f' est nulle part localement identiquement égal à zéro. Alors, comme dans Exr. 51, le théorème d'identité fournit que l'ensemble $f'^{-1}(\{0\}) = \{z \in D \,|\, f'(z) = 0\}$ est discret et fermé dans D. Comme f est ouvert, l'ensemble

$$M := f(f'^{-1}(\{0\})) = \{f(z) \,|\, z \in D \text{ et } f'(z) = 0\} \subseteq f(D)$$

est également discret et fermé dans $f(D)$.

(d) Soit $d \in f(D) \setminus M$ et posons $c := f^{-1}(d) \in D$. Comme $f \in \mathcal{O}(D)$, d'après Déf. 2.1, il existe une fonction $g : D \to \mathbb{C}$, continue en c, t.q. $g(c) = f'(c) \neq 0$ et t.q., pour tout $z \in D$, on a

$$f(z) = f(c) + (z - c)g(z).$$

En posant $w = f(z)$, on peut donc écrire que

$$w = d + (f^{-1}(w) - c)h(w), \tag{1}$$

où la fonction h est définie par $h := g \circ f^{-1}$. Comme g est continu en c et comme, d'après *(b)*, f^{-1} est continu dans $f(D)$, la composée h est continu en d. En plus, on a $h(d) = g(f^{-1}(d)) = g(c) = f'(c) \neq 0$. En résolvant (1) p.r. à $f^{-1}(w)$, on trouve, pour tout w dans un voisinage $U \subseteq f(D)$ de d suffisamment petit, que

$$f^{-1}(w) = c + (w - d)\,\frac{1}{h(w)} = f^{-1}(d) + (w - d)\,\frac{1}{h(w)},$$

c.-à-d., d'après Déf. 2.1, f^{-1} est $\mathbb{C}$-dérivable en d (et que $[f^{-1}]'(d) = 1/f'(f^{-1}(d))$). Comme d était quelconque dans $f(D) \setminus M$, on obtient $f^{-1} \in \mathcal{O}(f(D) \setminus M)$.

(e) Finalement, comme $f^{-1} \in C(f(D)) \cap \mathcal{O}(f(D) \setminus M)$ et comme M est discret et fermé dans $f(D)$, le théorème de prolongement de Riemann (cf. Rrm. 9.4) fournit que $f^{-1} \in \mathcal{O}(f(D))$.

$\square$

Exercice 59. Classifier les singularités isolées des fonctions suivantes et, au cas d'un pôle, indiquer son ordre :

$$\text{(a)}\quad \frac{z^4}{(z^4+16)^2} \qquad \text{(b)}\quad \cos(1/z) \qquad \text{(c)}\quad \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$$

Solution

(a) Nous cherchons les zéros du dénominateur. L'équation

$$z^4 + 16 = z^4 + 2^4 = 2^4\left(\left(\frac{z}{2}\right)^4 + 1\right) = 0$$

a les quatre solutions différentes

$$z_k := 2\mathrm{e}^{(2k-1)\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \quad k \in \{1, \dots, 4\}.$$

Alors, nous pouvons écrire

$$\frac{z^4}{(z^4+16)^2} = \frac{z^4}{\prod_{k=1}^4 (z - z_k)^2},$$

et donc, d'après Thm. 9.6 *(b)*, cette fonction a des pôles d'ordre 2 en z_k pour tout $k \in \{1, \dots, 4\}$.

(b) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $z_n := 1/(n\pi) \in \mathbb{C}^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ et comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\cos(1/z_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n,$$

le théorème de Casorati-Weierstrass (cf. Thm. 9.12 *(c)*) implique que le point $0 \in \mathbb{C}$ est une singularité essentielle.

(c) Nous notons que z est un zéro du dénominateur ssi $z \in \ker(\exp) = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ (cf. Prop. 5.7). Comme $\mathrm{e}^z \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, on a, d'après Déf. 2.1, que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{e}^z = 1 + (z - 2\pi\mathrm{i}m)g_m(z),$$

où $g_m : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est continu en $z_m := 2\pi\mathrm{i}m$ et $g_m(z_m) = (\mathrm{e}^z)'|_{z=z_m} = 1$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Il en résulte qu'il existe $r > 0$ suffisamment petit t.q., pour tout $z \in B_r(z_m)$,

$$(z - 2\pi\mathrm{i}m)\,\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = (z - 2\pi\mathrm{i}m)\,\frac{z}{(z - 2\pi\mathrm{i}m)g_m(z)} = \frac{z}{g_m(z)}.$$

Cas $m = 0$: Dans ce cas, on obtient

$$\lim_{z\to 0} z\,\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = 0.$$

Alors, le théorème de prolongement de Riemann (cf. Thm. 9.3 *(d)*) implique que 0 est une singularité effaçable.

Cas $m \neq 0$: Dans ce cas, z_m n'est pas une singularité effaçable parce qu'on a $\lim_{z\to z_m} z/g_m(z) = z_m \neq 0$ mais $z/g_m(z)$ est borné pour tout $z \in B_r(z_m)$. Alors, Déf. 9.5 implique que z_m est un pôle d'ordre 1.

□

Exercice 60. Soit $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$. Montrer que, si f est injectif, le point $c \in D$ ne peut être une singularité essentielle de f.

Solution *Indication* : Utiliser le théorème de l'image ouverte (cf. Thm. 8.12) et le théorème de Casorati-Weierstrass (cf. Thm. 9.12).

(a) Soit $r > 0$ t.q. $B := B_r(c)$ satisfait $\overline{B} \subseteq D$. Alors, l'ensemble

$$U := D \setminus \overline{B}$$

est un ouvert non vide dans D. Il s'ensuit que $f(U)$ est non vide et, comme f est nulle part localement constant dans D parce que f est injectif, le théorème de l'image ouverte implique que $f(U)$ est un ouvert dans $\mathbb{C}$.

(b) Comme $(B \setminus c) \cap U = \emptyset$ et comme f est injectif, on a $f(B \setminus c) \cap f(U) = \emptyset$.

(c) Alors, il existe $w \in f(U)$ (car $f(U)$ est non vide) et $s > 0$ avec $B_s(w) \subseteq f(U)$ (car $f(U)$ est un ouvert) t.q.

$$f(B \setminus c) \cap B_s(w) = \emptyset.$$

Il en résulte qu'il n'existe pas de suite dans $f(B \setminus c)$ qui converge vers $w \in \mathbb{C}$. Alors, par définition, $f(B \setminus c)$ n'est pas dense dans $\mathbb{C}$ et le théorème de Casorati-Weierstrass implique que c n'est pas une singularité essentielle de f.

□