UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 18

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 69. Déterminer la nature des singularités isolées à l'origine des fonctions suivantes en déterminant la partie principale de leurs séries de Laurent :

$$\textit{(a)}\quad \exp(1/z) \qquad \textit{(b)}\quad \frac{\sin z}{z^2} \qquad \textit{(c)}\quad \frac{1}{1-z^2}$$

Solution *Indication :* Utiliser Thm. 10.13.

(a) En utilisant la série exponentielle, on obtient

$$\exp(1/z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} = 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{|n|!}.$$

Alors, d'après Thm. 10.13 *(c)*, l'origine est une singularité esentielle.

(b) En utilisant la série du sinus (cf. Prop. 4.10), on peut écrire que

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1}.$$

Alors, d'après Thm. 10.13 *(b)*, l'origine est un pôle d'ordre $m = 1$.

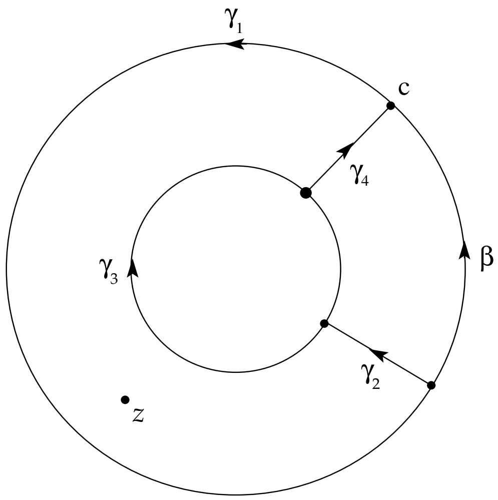
(c) La fonction $1/(1-z^2)$ est holomorphe à l'origine (la partie principale de sa série de Laurent est donc nulle et sa partie secondaire est égale à la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$ dans $\mathbb{E}$).

□

Exercice 70. Montrer que le bord d'un fer à cheval circulaire est constitué d'une courbe simplement fermée.

Solution *Indication :* Utiliser Prop. 11.5 *(a)*.

On a la figure suivante :



Le bord du fer à cheval F est défini par

$$\partial F := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4.$$

Les courbes fermée suivantes,

$$\begin{aligned} \partial A &:= -\beta + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4, \\ \partial B &:= \gamma_1 + \beta, \end{aligned}$$

délimitent les surfaces A et B. Comme les courbes fermées ∂A et ∂B partent du point c, Rem. 11.3 *(b)* implique que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (|\partial A| \cup |\partial B|)$, on a

$$\operatorname{ind}_{\partial A + \partial B}(z) = \operatorname{ind}_{\partial A}(z) + \operatorname{ind}_{\partial B}(z).$$

D'autre part, comme la courbe fermée ∂F part également du point c, nous avons

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}_{\partial A + \partial B}(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial A + \partial B} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\beta} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + \ldots + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\beta} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \\ &= \operatorname{ind}_{\partial F}(z), \end{aligned}$$

c.-à-d., nous obtenons, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (|\partial A| \cup |\partial B|)$,

$$\operatorname{ind}_{\partial F}(z) = \operatorname{ind}_{\partial A}(z) + \operatorname{ind}_{\partial B}(z). \tag{1}$$

Cas $z \in F$ *:* D'après Prop. 11.5 *(a)*, on a $\mathrm{ind}_{\partial B}(z) = 1$ pour tout $z \in F$. Comme, pour tout $z \in F$, il existe un ouvert étoilé D_A t.q. $z \notin D_A$ et $\partial A \subseteq D_A$ (faire un dessin), le théorème intégral de Cauchy fournit que $\mathrm{ind}_{\partial A}(z) = 0$, et, en utilisant (1) (car $F \subseteq \mathbb{C} \setminus (|\partial A| \cup |\partial B|)$), nous trouvons que $\mathrm{ind}_F(z) = 1$ pour tout $z \in F$.

Cas $z \notin F$ *:* Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}$, il existe un ouvert étoilé D_B t.q. $z \notin D_B$ et $\partial F \subseteq D_B$ (faire un dessin) et le théorème intégral de Cauchy fournit que $\mathrm{ind}_{\partial F}(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}$. De manière similaire, on trouve que $\mathrm{ind}_{\partial F}(z) = 0$ pour tout $z \in |\beta| \setminus [\{c\} \cup (|\beta| \cap |\gamma_2|)]$. Finalement, si $z \in A$, nous pouvons procéder comme dans Exr. 42 ce qui fournit, en utilisant (1) (car $A \subseteq \mathbb{C} \setminus (|\partial A| \cup |\partial B|)$), que, pour tout $z \in A$,

$$\mathrm{ind}_{\partial F}(z) = \underbrace{\mathrm{ind}_{\partial A}(z)}_{=-1} + \underbrace{\mathrm{ind}_{\partial B}(z)}_{=1}.$$

Il en résulte que $\mathrm{ind}_{\partial F}(z) = 0$ pour tout $z \notin F$ et donc, $\mathrm{int}(\partial F) = F$ et $\mathrm{ind}_{\partial F}(z) = 1$ pour tout $z \in F$, c.-à-d., ∂F est une courbe simplement fermée.

□

Exercice 71. Soit $f \in \mathcal{O}(D \setminus c)$ et soit $c \in D$ un pôle d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ de f. Montrer que

$$\mathrm{res}_c(f) = \frac{h^{(m-1)}(c)}{(m-1)!},$$

où h est le prolongement holomorphe de $(z-c)^m f(z)$ en c.

<u>Solution</u> *Indication :* Utiliser Prop. 9.8 et le théorème de Cauchy-Taylor (cf. Thm. 7.10).

D'après Prop. 9.8, il existe des constantes $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$ avec $b_m \neq 0$ et une fonction $\tilde{f} \in \mathcal{O}(D)$ t.q., pour tout $z \in D \setminus c$, on a

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-c)^m} + \ldots + \frac{b_1}{z-c} + \tilde{f}(z).$$

Alors, la fonction $h : D \to \mathbb{C}$, définie, pour tout $z \in D$, par

$$h(z) = \sum_{i=0}^{m-2} b_{m-i}(z-c)^i + b_1(z-c)^{m-1} + (z-c)^m \tilde{f}(z),$$

est le prolongement holomorphe de $(z-c)^m f(z)$ en c. En plus, d'après le théorème de Cauchy-Taylor, on a $b_1 = h^{(m-1)}(c)/(m-1)!$ et, comme $b_1 = \mathrm{res}_c(f)$, il en résulte que

$$h^{(m-1)}(c) = (m-1)!\ \mathrm{res}_c(f).$$

□

Exercice 72. Calculer les résidus des fonctions suivantes en toutes leurs singulariés isolées :

$$\textit{(a)}\quad \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+1} \qquad \textit{(b)}\quad \frac{z^3+1}{z(z-1)^2} \qquad \textit{(c)}\quad \exp(z+1/z)$$

Solution

(a) Comme $z^2+1=(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$ la fonction ne possède que des pôles simples. Alors, nous pouvons appliquer Prop. 11.8 *(b)* qui nous fournit

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z^2+1}\right)&=\lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})\,\frac{\mathrm{e}^z}{z^2+1}=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^z}{z+\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}},\\ \operatorname{res}_{-\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z^2+1}\right)&=\lim_{z\to-\mathrm{i}}(z+\mathrm{i})\,\frac{\mathrm{e}^z}{z^2+1}=\lim_{z\to-\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^z}{z-\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}.\end{aligned}$$

(b) L'origine est un pôle simple et le point $z=1$ est un pôle d'ordre 2. Alors, en utilisant Prop. 11.8 *(b)* et *(c)* (cf. Exr. 71), on obtient

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_0\left(\frac{z^3+1}{z(z-1)^2}\right)&=\lim_{z\to0}\frac{z^3+1}{(z-1)^2}=1,\\ \operatorname{res}_1\left(\frac{z^3+1}{z(z-1)^2}\right)&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=1}\left[(z-1)^2\,\frac{z^3+1}{z(z-1)^2}\right]=\left.\frac{2z^3-1}{z^2}\right|_{z=1}=1.\end{aligned}$$

(c) Comme l'origine est une singularité essentielle, nous développons la fonction en sa série de Laurent pour extraire le coéfficient a_{-1} et nous obtenons

$$\begin{aligned}\exp(z+1/z)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(z+\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{n-k}\frac{1}{z^k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{z^{2k}}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\frac{1}{z^{2k}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\frac{1}{z^{2k}}.\end{aligned}$$

Comme la première série ne peut contenir une puissance $1/z$, il suffit d'extraire les termes de la deuxième série qui sont t.q. $2n+1-2k=-1$, c.-à-d., t.q. $k=n+1$. Il en résulte alors que

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_0[\exp(z+1/z)]&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\binom{2n+1}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\frac{(2n+1)!}{(n+1)![(2n+1-(n+1)]!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}.\end{aligned}$$

□