UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Fonctions analytiques – TD 19

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M65 L3 Cours du 2e semestre 2014 – 2015 (19x2h CM et 19x2h TD)

Licence Mathématiques

Exercice 73. Soient $c \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ et soient $f, g \in \mathcal{O}(B_r(c))$ t.q.

(a) $f(c) \neq 0$,

(b) $g(c) = 0$ et $g'(c) \neq 0$.

Montrer que f/g possède un pôle simple en c et que

$$\operatorname{res}_c\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(c)}{g'(c)}.$$

Solution D'après le théorème de Cauchy-Taylor (cf. Thm. 7.10) et l'hypothèse *(b)*, il existe $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{O}(B_r(c))$ avec $\tilde{g}(c) = \tilde{f}(c) = 0$ t.q., pour tout $z \in B_r(c)$,

$$f(z) = \underbrace{f(c)}_{\neq 0} + \tilde{f}(z), \qquad g(z) = (z-c)[\underbrace{g'(c)}_{\neq 0} + \tilde{g}(z)].$$

Alors, comme il existe $0 < s \leq r$ t.q. $g'(c) + \tilde{g}(z)$ n'a pas de zéros dans $B_s(c)$, on peut écrire que, pour tout $z \in B_s(c) \setminus c$,

$$(z-c)\,\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(c) + \tilde{f}(z)}{g'(c) + \tilde{g}(z)} = \frac{f(c)}{g'(c)}\,\frac{1 + \frac{\tilde{f}(z)}{f(c)}}{1 + \frac{\tilde{g}(z)}{g'(c)}},$$

c.-à-d., il existe une constante $M > 0$ t.q., pour tout $z \in B_s(c) \setminus c$,

$$\left|(z-c)\,\frac{f(z)}{g(z)}\right| \leq M.$$

Comme il n'existe aucun voisinage de c dans lequel f/g est borné, c est un pôle simple de f/g d'après Déf. 9.5. En plus, d'après Prop. 11.8 *(b)*, le résidu de f/g au point c est égal à

$$\lim_{z \to c}(z-c)\,\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(c)}{g'(c)}.$$

□

Exercice 74. Montrer :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{x^2}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Solution *Indication :* Utiliser Thm. 11.17 et Exr. 73.

Comme les quatre solutions de l'équation $1 + z^4 = 0$ sont données par

$$z_1 = \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{4}}, \quad z_2 = \mathrm{i}z_1, \quad z_3 = -z_1, \quad z_4 = -\mathrm{i}z_1,$$

la fonction $f(z) := z^2/(1+z^4)$ satisfait $f \in \mathcal{O}(D \setminus A)$, où $D := \mathbb{C}$ et $A := \{z_1, \ldots, z_4\}$, et les points $z_1, \ldots, z_4$ sont des pôles simples de f. Alors, comme $\overline{\mathbb{H}} \subseteq D$ et $A \subseteq D \setminus \mathbb{R}$ et comme $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x) < \infty$ et $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$, Thm. 11.17 implique que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x) = 2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{2} \mathrm{res}_{z_i}(f).$$

Tout ce qui nous reste à faire c'est de calculer les résidus en les deux pôles simples z_1 et z_2. En utilisant Exr. 73, nous avons

$$\mathrm{res}_{z_1}(f) = \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4z_1}, \qquad \mathrm{res}_{z_2}(f) = \frac{1}{4z_2} = \frac{1}{4\mathrm{i}z_1},$$

et finalement, nous arrivons à

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x) = 2\pi\mathrm{i}\, \frac{1}{4z_1} \left(1 + \frac{1}{\mathrm{i}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

□

Exercice 75. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $m < n$. Montrer :

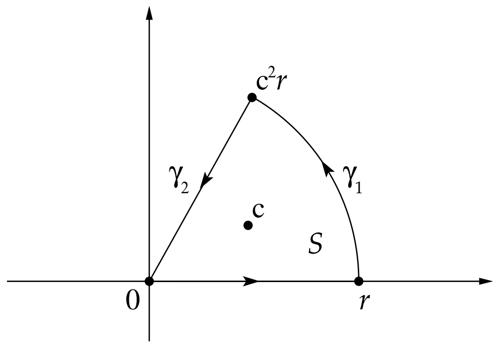
$$\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{x^{m-1}}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)}$$

Solution *Indication :* Utiliser le théorème des résidus (cf. Thm. 11.10) et Exr. 73.

Les solutions de l'équation $1 + z^n = 0$ sont données, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, par

$$z_k := \mathrm{e}^{(2k-1)\frac{\pi \mathrm{i}}{n}}.$$

Alors, la fonction $f(z) := z^{m-1}/(1+z^n)$ satisfait $f \in \mathcal{O}(U \setminus c)$, où $c := z_1$ et U est un ouvert étoilé qui contient le secteur circulaire ouvert S de la figure suivante :



Ensuite, pour $r > 1$, le théorème des résidus implique que

$$\int_0^r \mathrm{d}x\, f(x) = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_c(f) - \int_{\gamma_1} \mathrm{d}z\, f(z) - \int_{\gamma_2} \mathrm{d}z\, f(z).$$

Nous commençons par calculer le résidu de f au point c. Comme c est un pôle simple de f, Exr. 73 fournit

$$\mathrm{res}_c(f) = \frac{c^{m-1}}{nc^{n-1}} = \frac{c^m}{nc^n} = -\frac{c^m}{n}.$$

Ensuite, nous voulons montrer que l'intégrale $\int_{\gamma_1} \mathrm{d}z\, f(z)$ ne contibue rien dans la limite $r \to \infty$. Pour ce faire, nous utilisons l'estimation standard (cf. Prop. 6.11) qui fournit, comme $m < n$, que

$$\left| \int_{\gamma_1} \mathrm{d}z\, f(z) \right| \leq |f|_{\gamma_1} \frac{2\pi r}{n} \leq \frac{r^{m-1}}{r^n - 1} \frac{2\pi r}{n} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0.$$

En ce qui concerne l'intégrale $\int_{\gamma_2} \mathrm{d}z\, f(z)$, nous utilisons le paramétrage $[0, r] \ni t \mapsto c^2 t$ pour le chemin $-\gamma_2$ et nous obtenons

$$\int_{\gamma_2} \mathrm{d}z\, f(z) = -\int_0^r \mathrm{d}t\, \frac{t^{m-1} c^{2m-2}}{1 + t^n c^{2n}}\ c^2 = -c^{2m} \int_0^r \mathrm{d}t\, \frac{t^{m-1}}{1 + t^n} = -c^{2m} \int_0^r \mathrm{d}x\, f(x).$$

Alors, nous arrivons à

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, f(x) = 2\pi\mathrm{i}\, \frac{c^m}{n(c^{2m} - 1)} = \frac{\pi}{n\, \frac{c^m - c^{-m}}{2\mathrm{i}}} = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)}.$$

□

Exercice 76. Soient $a, b > 0$. Montrer :

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \, \frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2} = \frac{\pi}{2\mathrm{e}^{ab}}$$

<u>Solution</u> *Indication :* Utiliser Thm. 11.19.

En posant $A := \{-\mathrm{i}b, \mathrm{i}b\}$, nous avons $f(z) := z\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}/(z^2+b^2) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\backslash A)$. Comme $\lim_{z\to\infty} z/(z^2+b^2) = 0$, nous pouvons appliquer Thm. 11.19 pour $a > 0$ et nous obtenons

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \, \frac{x \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}}{x^2 + b^2} = 2\pi\mathrm{i} \, \mathrm{res}_{\mathrm{i}b}(f).$$

Alors, comme le point $\mathrm{i}b$ est un pôle simple, on a (cf. Prop. 11.8 *(a)*)

$$\mathrm{res}_{\mathrm{i}b}(f) = \lim_{z\to\mathrm{i}b} (z - \mathrm{i}b) f(z) = \lim_{z\to\mathrm{i}b} \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z + \mathrm{i}b} = \frac{1}{2\mathrm{e}^{ab}}.$$

Il en résulte que

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \, \frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \, \frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \, \frac{x \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}}{x^2 + b^2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left(2\pi\mathrm{i} \, \frac{1}{2\mathrm{e}^{ab}} \right) = \frac{\pi}{2\mathrm{e}^{ab}}.$$

□