UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

Initiation à la recherche

W. Aschbacher **M74 M1** Cours du 1er semestre 2014 – 2015 *Master Mathématiques*

Examen du 12/01/2015 (Contrôle terminal)
Durée : 120 minutes
Moyens autorisés : Un aide-mémoire constitué d'une seule feuille A4 recto-verso

---

Questions à choix multiple

Nota bene : Un point n'est accordé que si, pour chaque question, tous les items sont correctement cochés. Il n'y aura pas de demi-points ou de points négatifs.

Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

Question 1. [1.0] Soit G un GLM et $X \in \mathrm{Lie}(G)$.

- ☐ $\mathrm{e}^X \in G$
- ☐ $\log(X) \in G$
- ☐ $X^2 \in G$

Question 2. [1.0] Soient G et H des GLM simplement connexes.

- ☐ $G \cong H \implies \mathrm{Lie}(G) \cong \mathrm{Lie}(H)$
- ☐ $\mathrm{Lie}(G) \cong \mathrm{Lie}(H) \implies G \cong H$
- ☐ Pour tout HAL $\varphi : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$, il existe un HGL $\Phi : G \to H$ t.q. $\Phi(\mathrm{e}^1) = \mathrm{e}^{\varphi(1)}$.

Question 3. [1.0] Soit $\mathfrak{g}$ une AL réelle et $(\mathfrak{g}, \mathcal{V}, \pi)$ une RAL complexe de $\mathfrak{g}$.

- ☐ La complexification $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathcal{V}, \pi_{\mathbb{C}})$ est irréductible ssi $(\mathfrak{g}, \mathcal{V}, \pi)$ est irréductible.
- ☐ $\pi_{\mathbb{C}}$ est l'unique prolongement à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de π.
- ☐ $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est une AL complexe.

Question 4. [1.0] Afin de classifier les RAL complexes irréductibles $(\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}), \mathcal{V}, \pi)$, nous avons utilisé la base $\{X, Y, H\}$ de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$. Quelle est la stratégie de la démonstration ?

Réponse (courte) :

Questions ouvertes

Nota bene : Les réponses à toutes les questions sont à justifier. Le barème est donné à titre inidicatif.

Par la suite, nous considérons le **groupe de Heisenberg**,

$$\mathrm{H}(3,\mathbb{R}) = \left\{ A \in \mathrm{Mat}(3,\mathbb{R}) \,\middle|\, A = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

et les matrices $E_1, E_2, E_3 \in \mathrm{Mat}(3,\mathbb{R})$ données par

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Question 5.

(a) [2.0] Montrer que $\mathrm{H}(3,\mathbb{R})$ est un GLM dans $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$.

(b) [4.0] Soit $\mathrm{h}(3,\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel réel de $\mathrm{Mat}(3,\mathbb{C})$ engendré par le sous-ensemble $\{E_1, E_2, E_3\}$ de $\mathrm{Mat}(3,\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{h}(3,\mathbb{R}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{H}(3,\mathbb{R}))$.

Question 6. Montrer par des calculs directs :

(a) [1.5] $[E_1, E_2] = E_3$, $[E_1, E_3] = 0$ et $[E_2, E_3] = 0$

(b) [3.0] $\mathrm{e}^X \mathrm{e}^Y = \mathrm{e}^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]}$ pour tout $X, Y \in \mathrm{h}(3,\mathbb{R})$ (**Heisenberg BCH**)

Indication : Utiliser que $\{E_1, E_2, E_3\}$ est une base de $\mathrm{h}(3,\mathbb{R})$.

Question 7.

(a) [1.0] Montrer que l'application exponentielle $\exp : \mathrm{h}(3,\mathbb{R}) \to \mathrm{H}(3,\mathbb{R})$ est bijective. Nous notons $\lambda : \mathrm{H}(3,\mathbb{R}) \to \mathrm{h}(3,\mathbb{R})$ sa réciproque.

(b) [3.5] Soit G un GLM et $\varphi : \mathrm{h}(3,\mathbb{R}) \to \mathrm{Lie}(G)$ un HAL. Montrer que l'application $\Phi : \mathrm{H}(3,\mathbb{R}) \to G$, définie, pour tout $A \in \mathrm{H}(3,\mathbb{R})$, par

$$\Phi(A) := \mathrm{e}^{\varphi(\lambda(A))},$$

est un HGL.

Indication : Utiliser *(a)* et Question 6 *(b)* pour $\varphi(X)$ et $\varphi(Y)$, c.-à-d., $\mathrm{e}^{\varphi(\lambda(\mathrm{e}^X \mathrm{e}^Y))} = \mathrm{e}^{\varphi(X)} \mathrm{e}^{\varphi(Y)}$ pour tout $X, Y \in \mathrm{h}(3,\mathbb{R})$.

(c) [1.0] Montrer que, pour tout GLM G et tout HAL $\varphi : \mathrm{h}(3,\mathbb{R}) \to \mathrm{Lie}(G)$, il existe un unique HGL $\Phi : \mathrm{H}(3,\mathbb{R}) \to G$ t.q., pour tout $X \in \mathrm{h}(3,\mathbb{R})$, nous avons

$$\Phi(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\varphi(X)}.$$