UFR Sciences et Techniques

Initiation à la recherche – TD 3

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M74 M1 Cours du 1er semestre 2014 – 2015 (2e partie ; (6x2+1x1.5)h CM et TD)

Master Mathématiques

Exercice 11. Soient $X, Y \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$. Alors :

(a) $\mathrm{e}^0 = 1$

(b) $\left(\mathrm{e}^X\right)^* = \mathrm{e}^{X^*}$

(c) $\mathrm{e}^X \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{C})$ et $\left(\mathrm{e}^X\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-X}$

(d) $\mathrm{e}^{(\lambda+\mu)X} = \mathrm{e}^{\lambda X}\mathrm{e}^{\mu X}$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

(e) $\mathrm{e}^{X+Y} = \mathrm{e}^X\mathrm{e}^Y$ si $[X, Y] = 0$

(f) $\mathrm{e}^{CXC^{-1}} = C\mathrm{e}^X C^{-1}$ pour tout $C \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{C})$

(g) $\|\mathrm{e}^X\| \leq \mathrm{e}^{\|X\|}$

(h) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{tX} = X\mathrm{e}^{tX} = \mathrm{e}^{tX}X$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

(i) $\det(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(X)}$

<u>Solution</u>

(a) Clair

(b) L'involution $^* : \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$, donnée par $A \mapsto A^*$ pour tout $A \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ (où A^* est la matrice adjointe de A), est continue parce que

$$\|X^* - Y^*\| = \|(X - Y)^*\| = \|X - Y\|,$$

où nous avons utilisé Prop. 2.2 *(b)*. Alors, on peut écrire

$$\left(\mathrm{e}^X\right)^* = \left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}X^n\right)^* = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}X^n\right)^* = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}(X^*)^n = \mathrm{e}^{X^*}.$$

(c) Cas particulier de (e)

(d) Cas particulier de (e)

(e) Comme $[X,Y]=0$, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$(X+Y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}X^{n-i}Y^i,$$

ce qui n'est pas vrai en général si $[X,Y]\neq 0$. Alors, on obtient

$$\mathrm{e}^X\mathrm{e}^Y=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{X^l}{l!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{X^{n-i}}{(n-i)!}\frac{Y^i}{i!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\underbrace{\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}X^{n-i}Y^i}_{=(X+Y)^n}$$
$$=\mathrm{e}^{X+Y},$$

où nous avons utilisé la formule du produit de Cauchy.
Nota bene : En général, on a $\mathrm{e}^X\mathrm{e}^Y\neq\mathrm{e}^{X+Y}$.

(f) Comme $(CXC^{-1})^n=CX^nC^{-1}$, on peut écrire

$$\mathrm{e}^{CXC^{-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(CXC^{-1})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}CX^nC^{-1}=C\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X^n\right)C^{-1}=C\mathrm{e}^XC^{-1},$$

où nous avons utilisé que l'application $\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})\to\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$, définie par $A\mapsto CAC^{-1}$ pour tout $A\in\mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ (et $C\in\mathrm{GL}(d,\mathbb{C})$ fixé), est continue.

(g) Cf. Dém. 2.4 *(a)*

(h) Soit $t\in\mathbb{R}$ fixé et $h\in\mathbb{R}^*$. Alors, on a

$$\begin{aligned}\left\|\tfrac{1}{h}(\mathrm{e}^{(t+h)X}-\mathrm{e}^{tX})-X\mathrm{e}^{tX}\right\|&\leq\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\Big|\underbrace{\tfrac{1}{h}[(t+h)^n-t^n]-nt^{n-1}}_{=\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}t^{n-i}h^{i-1}}\Big|\,\|X\|^n\\&\leq\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\tfrac{1}{|h|}[(|t|+|h|)^n-|t|^n]-n|t|^{n-1}\right)\|X\|^n\\&=\underbrace{\tfrac{1}{|h|}\left(\mathrm{e}^{(|t|+|h|)\|X\|}-\mathrm{e}^{|t|\|X\|}\right)}_{\to\|X\|\,\mathrm{e}^{|t|\|X\|}\text{ pour }h\to 0}-\|X\|\,\mathrm{e}^{|t|\|X\|}.\end{aligned}$$

(i) Nous allons procéder comme suit (cf. aussi Prop. 2.7) :
Cas 1 : X est diagonalisable.
D'après Rap. 2.46, il existe $C\in\mathrm{GL}(d,\mathbb{C})$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_d\in\mathbb{C}$ t.q. $X=C\mathrm{diag}[\lambda_1,\dots,\lambda_d]C^{-1}$. Alors, comme $\mathrm{e}^X=C\mathrm{e}^{\mathrm{diag}[\lambda_1,\dots,\lambda_d]}C^{-1}=C\mathrm{diag}[\mathrm{e}^{\lambda_1},\dots,\mathrm{e}^{\lambda_d}]C^{-1}$, on obtient

$$\det(\mathrm{e}^X)=\det(C)\det(\mathrm{diag}[\mathrm{e}^{\lambda_1},\dots,\mathrm{e}^{\lambda_d}])\det(C^{-1})=\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{d}\lambda_i}=\mathrm{e}^{\mathrm{tr}(X)}.$$

Cas 2 : X est nilpotent.
D'après le théorème de la décomposition de Schur (cf. Rap. 1.46), il existe $U\in\mathrm{U}(d)$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_d\in\mathbb{C}$ t.q.

$$X=U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ & & \lambda_d\end{bmatrix}U^*.$$

Comme X est nilpotent, on a $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ et donc,

$$\operatorname{tr}(X) = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i = 0.$$

En outre, on trouve également que

$$\mathrm{e}^X = U \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{\lambda_d} \end{bmatrix} U^*,$$

d'où $\det(\mathrm{e}^X) = \prod_{i=1}^{d} \mathrm{e}^{\lambda_i} = 1$. Alors, on obtient $\det(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr}(X)}$.
Cas 3 : Général.
D'après Rap. 2.47, il existe $S, N \in \operatorname{Mat}(d, \mathbb{C})$, où S est diagonalisable, N est nilpotent et $[S, N] = 0$ t.q. $X = S + N$. Alors, en utilisant (e), on a $\mathrm{e}^X = \mathrm{e}^S \mathrm{e}^N$ et donc,

$$\det(\mathrm{e}^X) = \det(\mathrm{e}^S)\det(\mathrm{e}^N) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr}(S)}\mathrm{e}^{\operatorname{tr}(N)} = \mathrm{e}^{\operatorname{tr}(S+N)} = \mathrm{e}^{\operatorname{tr}(X)}.$$

□

Exercice 12. Soit $X \in \operatorname{Mat}(d, \mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de X. Alors, $|\lambda| \leq \|X\|$.

Solution Soit $\{e_i\}_{i=1}^d$ une base orthonormée de $\mathbb{C}^d$ et $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ le produit scalaire euclidien usuel sur $\mathbb{C}^d$. Alors, pour tout $X \in \operatorname{Mat}(d, \mathbb{C})$, on peut écrire

$$\|X\|^2 = \operatorname{tr}(X^*X) = \sum_{i=1}^{d} \langle Xe_i, Xe_i \rangle = \sum_{i,j=1}^{d} \overline{\langle e_i, Xe_j \rangle} \langle e_i, Xe_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{d} |\langle e_i, Xe_j \rangle|^2,$$

où nous avons utilisé que la trace ne dépend pas de la base orthonormée choisie et que $Xe_i = \sum_{j=1}^{d} \langle e_j, Xe_i \rangle e_j$. Ensuite, soit $v \in \mathbb{C}^d$ un vecteur propre normalisé de X associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, c.-à-d., on a $Xv = \lambda v$ et $\langle v, v \rangle = 1$. Alors, en choisissant une base orthonormée de $\mathbb{C}^d$ qui comporte v (ce qui est toujours possible) et en utilisant l'équation précédente, on obtient

$$|\lambda|^2 = |\langle v, Xv \rangle|^2 \leq \|X\|^2.$$

□

Exercice 13. Soit $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$. Alors, il existe une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices diagonalisables dans $\mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ t.q. $X_n \to X$.

Solution Soit $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$. Alors, d'après le théorème de la décomposition de Schur (cf. Rap. 1.46), il existe $U \in \mathrm{U}(d)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ t.q.

$$X = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{bmatrix} U^*.$$

A présent, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, soient $(\lambda_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ des suites complexes t.q.

$$\begin{aligned} &\lambda_{i,n} \neq \lambda_{j,n} \quad \text{pour tout } i \neq j \text{ et tout } n \in \mathbb{N}, \\ &\lambda_{i,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_i \quad \text{pour tout } i \in \{1, \ldots, d\}. \end{aligned}$$

Alors, si on pose

$$X_n := U \begin{bmatrix} \lambda_{1,n} & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{d,n} \end{bmatrix} U^*,$$

tous les zéros du polynôme caractéristique $\chi_{X_n}(z) = \det(X_n - z) = \prod_{i=1}^d (\lambda_{i,n} - z)$ de X_n sont différents et donc, X_n est diagonalisable. En plus, on a $X_n \to X$ par construction. $\square$

Exercice 14. Soit A un sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$. Alors, $\mathrm{ran}\,(A)$ est un sous-groupe abélien de $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$.

Solution L'ensemble $\mathrm{ran}\,(A) = \{A(t) \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{C}) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$:

(SG1) $A(t)A(s) = A(t + s) \in \mathrm{ran}\,(A)$ pour tout $t, s \in \mathbb{R}$

(SG2) $A(t)^{-1} = A(-t) \in \mathrm{ran}\,(A)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

En plus, comme $A(t)A(s) = A(t+s) = A(s+t) = A(s)A(t)$ pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, le sous-groupe $\mathrm{ran}\,(A)$ est abélien. $\square$

Exercice 15. Soit G un GLM et $X \in \mathrm{Lie}(G)$. Alors :

(a) $\mathrm{e}^X \in G_e$

(b) $AXA^{-1} \in \mathrm{Lie}(G)$ pour tout $A \in G$

<u>Solution</u>

(a) Soit $X \in \mathrm{Lie}(G)$ et soit $\Gamma \in C([0,1], G)$ le chemin défini, pour tout $t \in [0,1]$, par

$$\Gamma(t) := \mathrm{e}^{tX}.$$

Alors, on a $\Gamma(0) = 1$ et $\Gamma(1) = \mathrm{e}^X$ et donc, $\mathrm{e}^X \in G_e$.

(b) Soient $A \in G$ et $X \in \mathrm{Lie}(G)$. Alors, d'après Prop. 2.6 *(f)*, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{tAXA^{-1}} = A \underbrace{\mathrm{e}^{tX}}_{\in G} A^{-1} \in G.$$

$\square$