UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

# *Initiation à la recherche – TD 4*

---

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

**M74 M1** Cours du 1er semestre 2014 – 2015 (2e partie ; (6x2+1x1.5)h CM et TD)

*Master Mathématiques*

---

**Exercice 16.** Montrer :

(a) $\mathrm{u}(d) = \{X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C}) \,|\, X^* = -X\}$

(b) $\mathrm{su}(d) = \{X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C}) \,|\, X^* = -X,\ \mathrm{tr}(X) = 0\}$

(c) $\mathrm{o}(d) = \mathrm{so}(d) = \{X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{R}) \,|\, X^T = -X\}$

**Exercice 17.** Soient $G$, $H$ et $K$ des GLM et $\Phi : H \to K$, $\Psi : G \to H$ et $\Lambda = \Phi \circ \Psi$ des HGL avec leurs HAL associés $\varphi$, $\psi$ et $\lambda$ respectifs (cf. Thm. 2.21). Alors :

$$\lambda = \varphi \circ \psi.$$

**Exercice 18.** L'application exponentielle a les propriétés suivantes.

(a) Elle n'est pas injective pour $\mathrm{SU}(2)$.

(b) Elle n'est pas surjective pour $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

**Exercice 19.** Soit $G$ un GLM connexe, $H$ un GLM, $\Phi_1, \Phi_2$ des HGL de $G$ dans $H$ et $\varphi_1, \varphi_2$ les HAL associés. Alors :

$$\varphi_1 = \varphi_2 \implies \Phi_1 = \Phi_2.$$

**Exercice 20.** Soit $\mathfrak{g}$ une AL réelle, $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ sa complexification, $\mathfrak{h}$ une AL complexe et $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un HAL réel. Alors, l'application $\varphi_\mathbb{C} : \mathfrak{g}_\mathbb{C} \to \mathfrak{h}$, donnée, pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$, par

$$\varphi_\mathbb{C}(X, Y) = \varphi(X) + \mathrm{i}\varphi(Y),$$

est un HAL complexe. En outre, $\varphi_\mathbb{C}$ est l'unique prolongement à $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ de $\varphi$ (la **propriété universelle** de la complexification).