UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Initiation à la recherche – TD 4

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M74 M1 Cours du 1er semestre 2014 – 2015 (2e partie ; (6x2+1x1.5)h CM et TD)

Master Mathématiques

Exercice 16. Montrer :

(a) $\mathrm{u}(d) = \{X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C}) \,|\, X^* = -X\}$

(b) $\mathrm{su}(d) = \{X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C}) \,|\, X^* = -X, \ \mathrm{tr}(X) = 0\}$

(c) $\mathrm{o}(d) = \mathrm{so}(d) = \{X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{R}) \,|\, X^T = -X\}$

Solution

(a) $\subseteq$: Soit $X \in \mathrm{u}(d)$. Alors, en utilisant Prop. 2.6 *(b)* et *(c)*, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\underbrace{\left(\mathrm{e}^{tX}\right)^{-1}}_{=\mathrm{e}^{-tX}} = \underbrace{\left(\mathrm{e}^{tX}\right)^{*}}_{=\mathrm{e}^{tX^*}}.$$

En dérivant $\mathrm{e}^{-tX} = \mathrm{e}^{tX^*}$ p.r. à t au point $t = 0$, on obtient $X^* = -X$.

$\supseteq$: Soit $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ t.q. $X^* = -X$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(\mathrm{e}^{tX})^{-1} = \mathrm{e}^{-tX} = \mathrm{e}^{tX^*} = (\mathrm{e}^{tX})^*$, c.-à-d., $\mathrm{e}^{tX} \in \mathrm{U}(d)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) $\subseteq$: Soit $X \in \mathrm{su}(d)$. Alors, comme $\mathrm{su}(d) \subseteq \mathrm{u}(d) \cap \mathrm{sl}(d, \mathbb{C})$, on a, d'après (a) et Prop. 2.17 *(c)*, que $X^* = -X$ et $\mathrm{tr}(X) = 0$.

$\supseteq$: Soit $X \in \mathrm{u}(d) \cap \mathrm{sl}(d, \mathbb{C})$. Alors, on a $\mathrm{e}^{tX} \in \mathrm{U}(d) \cap \mathrm{SL}(d, \mathbb{C}) = \mathrm{SU}(d)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(c) *Pour* $\mathrm{o}(d)$ *:*

$\subseteq$: Soit $X \in \mathrm{o}(d)$. Alors, en utilisant Prop. 2.6 *(b)* et *(c)*, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\underbrace{\left(\mathrm{e}^{tX}\right)^{-1}}_{=\mathrm{e}^{-tX}} = \underbrace{\left(\mathrm{e}^{tX}\right)^{T}}_{=\mathrm{e}^{tX^T}}.$$

En dérivant $\mathrm{e}^{-tX} = \mathrm{e}^{tX^T} \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{R})$ p.r. à t au point $t = 0$, on obtient $X^T = -X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{R})$.

$\supseteq$: Soit $X \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{R})$ t.q. $X^T = -X$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(\mathrm{e}^{tX})^{-1} = \mathrm{e}^{-tX} = \mathrm{e}^{tX^T} = (\mathrm{e}^{tX})^T$, c.-à-d., $\mathrm{e}^{tX} \in \mathrm{O}(d)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Pour $\mathrm{so}(d)$ *:*
$\subseteq$: D'une part, on a $\mathrm{so}(d) \subseteq \mathrm{o}(d) \cap \mathrm{sl}(d, \mathbb{R})$. D'autre part, on a également $\mathrm{o}(d) \subseteq \mathrm{sl}(d, \mathbb{R})$ parce que, de $X \in \mathrm{o}(d)$, il résulte $\mathrm{tr}(X^T) = \mathrm{tr}(-X)$, d'où $\mathrm{tr}(X) = 0$. Alors, on obtient $\mathrm{so}(d) \subseteq \mathrm{o}(d)$.
$\supseteq$: Soit $X \in \mathrm{o}(d)$. Alors, on a $\mathrm{e}^{tX} \in \mathrm{O}(d)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En plus, comme $\mathrm{o}(d) \subseteq \mathrm{sl}(d, \mathbb{R})$, on a $\det(\mathrm{e}^{tX}) = \mathrm{e}^{t\mathrm{tr}(X)} = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc, $X \in \mathrm{so}(d)$.

Remarque : Nous notons que pour deux GLM G et H dans $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$, nous pouvons écrire que $\mathrm{Lie}(G \cap H) = \mathrm{Lie}(G) \cap \mathrm{Lie}(H)$.

□

Exercice 17. Soient G, H et K des GLM et $\Phi : H \to K$, $\Psi : G \to H$ et $\Lambda = \Phi \circ \Psi$ des HGL avec leurs HAL associés φ, ψ et λ respectifs (cf. Thm. 2.21). Alors :

$$\lambda = \varphi \circ \psi.$$

Solution Pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\Lambda(\mathrm{e}^{tX}) = \Phi(\Psi(\mathrm{e}^{tX})) = \Phi(\mathrm{e}^{t\psi(X)}) = \mathrm{e}^{t\varphi(\psi(X))}.$$

D'autre part, on a également $\Lambda(\mathrm{e}^{tX}) = \mathrm{e}^{t\lambda(X)}$ pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$ et tout $t \in \mathbb{R}$. Alors, en dérivant l'équation $\mathrm{e}^{t\lambda(X)} = \mathrm{e}^{t\varphi(\psi(X))}$ p.r. à t au point $t = 0$, on arrive à la conclusion. □

Exercice 18. L'application exponentielle a les propriétés suivantes.
(a) Elle n'est pas injective pour $\mathrm{SU}(2)$.
(b) Elle n'est pas surjective pour $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

Solution

(a) Soit $X := 0$ et $Y := 2\pi\mathrm{i}\sigma_3$ (où σ_3 est la matrice de Pauli de Déf. 1.36). Alors, nous avons que $X, Y \in \mathrm{su}(2)$ et que

$$\exp_{\mathrm{SU}(2)}(X) = \exp_{\mathrm{SU}(2)}(Y) = 1.$$

(b) Pour la matrice $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ suivante,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

nous voulons montrer qu'il n'existe pas de $X \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ t.q. $A = \exp_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}(X)$. Pour ce faire, soit $X \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ quelconque et soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ les valeurs propres de X. Comme $\mathrm{tr}(X) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ (cf. Prop. 2.17 *(c)*), nous avons $\lambda_2 = -\lambda_1$.

Cas $\lambda_1 = 0$ *:*
D'après le théorème de la décomposition de Schur (cf. Rap. 1.46), il existe $U \in \mathrm{U}(2)$ t.q. $X = U \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*$. Alors, on obtient

$$\mathrm{e}^X = U \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U^*,$$

d'où on voit que e^X a deux valeurs propres 1 contrairement à A, c.-à-d., on a que $A \neq \exp_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}(X)$.
Cas $\lambda_1 \neq 0$ *:*
Comme la matrice X a les deux valeurs propres différentes λ_1 et $\lambda_2 = -\lambda_1$, elle est diagonalisable, c.-à-d., il existe $C \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ t.q. $X = C \mathrm{diag}[\lambda_1, -\lambda_1] C^{-1}$ (cf. Rap. 2.46). Alors, on obtient

$$\mathrm{e}^X = C \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\lambda_1} \end{bmatrix} C^{-1},$$

c.-à-d., e^X est diagonalisable. Par contre, A n'est pas diagonalisable (A est un bloc de Jordan) parce que si A était diagonalisable, il existerait un $D \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ t.q. $A = D \mathrm{diag}[-1, -1] D^{-1} = \mathrm{diag}[-1, -1]$. Alors, on a que $A \neq \exp_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}(X)$.

□

Exercice 19. Soit G un GLM connexe, H un GLM, Φ_1, Φ_2 des HGL de G dans H et φ_1, φ_2 les HAL associés. Alors :

$$\varphi_1 = \varphi_2 \implies \Phi_1 = \Phi_2.$$

Solution Soit $A \in G$. Comme G est connexe, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_N \in \mathrm{Lie}(G)$ t.q. $A = \prod_{i=1}^N \exp(X_i)$ (cf. Prop. 2.28). Alors, on peut écrire

$$\Phi_1(A) = \Phi_1\Big(\textstyle\prod_{i=1}^N \mathrm{e}^{X_i}\Big) = \displaystyle\prod_{i=1}^N \Phi_1\left(\mathrm{e}^{X_i}\right) = \prod_{i=1}^N \mathrm{e}^{\varphi_1(X_i)} = \prod_{i=1}^N \mathrm{e}^{\varphi_2(X_i)} = \Phi_2(A).$$

□

Exercice 20. Soit $\mathfrak{g}$ une AL réelle, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ sa complexification, $\mathfrak{h}$ une AL complexe et $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un HAL réel. Alors, l'application $\varphi_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{h}$, donnée, pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$, par

$$\varphi_{\mathbb{C}}(X,Y) = \varphi(X) + \mathrm{i}\varphi(Y),$$

est un HAL complexe. En outre, $\varphi_{\mathbb{C}}$ est l'unique prolongement à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de φ (la **propriété universelle** de la complexification).

Solution D'abord, $\varphi_{\mathbb{C}}$ est une application linéaire complexe parce que, pour tout $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, elle est non seulement additive,

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbb{C}}((X_1,Y_1)+(X_2,Y_2)) &= \varphi_{\mathbb{C}}(X_1+X_2, Y_1+Y_2)\\ &= \varphi(X_1)+\varphi(X_2)+\mathrm{i}(\varphi(Y_1)+\varphi(Y_2))\\ &= \varphi_{\mathbb{C}}(X_1,Y_1)+\varphi_{\mathbb{C}}(X_2,Y_2),\end{aligned}$$

mais elle est également homogène complexe,

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbb{C}}((\alpha+\mathrm{i}\beta)(X,Y)) &= \varphi_{\mathbb{C}}(\alpha X-\beta Y, \beta X+\alpha Y)\\ &= \alpha\varphi(X)-\beta\varphi(Y)+\mathrm{i}(\beta\varphi(X)+\alpha\varphi(Y))\\ &= (\alpha+\mathrm{i}\beta)\varphi_{\mathbb{C}}(X,Y).\end{aligned}$$

Ensuite, $\varphi_{\mathbb{C}}$ est un HAL parce que, pour tout $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$, on a

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbb{C}}([(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)]) &= \varphi_{\mathbb{C}}([X_1,X_2]-[Y_1,Y_2],[X_1,Y_2]+[Y_1,X_2])\\ &= [\varphi(X_1),\varphi(X_2)]-[\varphi(Y_1),\varphi(Y_2)]+\mathrm{i}([\varphi(X_1),\varphi(Y_2)]+[\varphi(Y_1),\varphi(X_2)])\\ &= [\varphi(X_1)+\mathrm{i}\varphi(Y_1),\varphi(X_2)+\mathrm{i}\varphi(Y_2)]\\ &= [\varphi_{\mathbb{C}}(X_1,Y_1),\varphi_{\mathbb{C}}(X_2,Y_2)].\end{aligned}$$

Le HAL $\varphi_{\mathbb{C}}$ est un prolongement à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de φ dans le sens où, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on a

$$\varphi_{\mathbb{C}}(X,0) = \varphi(X).$$

S'il existe un autre HAL $\varphi'_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{h}$ qui satisfait cette équation, alors on a $\varphi'_{\mathbb{C}}(X,0) = \varphi(X) = \varphi_{\mathbb{C}}(X,0)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Comme $\varphi_{\mathbb{C}}$ et $\varphi'_{\mathbb{C}}$ sont homogène complexes, il en résulte que, pour tout $Y \in \mathfrak{g}$, on a

$$\varphi'_{\mathbb{C}}(0,Y) = \varphi'_{\mathbb{C}}(\mathrm{i}(Y,0)) = \mathrm{i}\varphi'_{\mathbb{C}}(Y,0) = \mathrm{i}\varphi_{\mathbb{C}}(Y,0) = \varphi_{\mathbb{C}}(\mathrm{i}(Y,0)) = \varphi_{\mathbb{C}}(0,Y).$$

Comme $\varphi_{\mathbb{C}}$ et $\varphi'_{\mathbb{C}}$ sont également additifs, on obtient finalement que, pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$\varphi'_{\mathbb{C}}(X,Y) = \varphi'_{\mathbb{C}}((X,0)+(0,Y)) = \varphi'_{\mathbb{C}}(X,0)+\varphi'_{\mathbb{C}}(0,Y) = \varphi_{\mathbb{C}}(X,0)+\varphi_{\mathbb{C}}(0,Y) = \varphi_{\mathbb{C}}(X,Y).$$

□