UNIVERSITÉ DE TOULON
UFR Sciences et Techniques

Initiation à la recherche – TD 5

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M74 M1 Cours du 1er semestre 2014 – 2015 (2e partie ; (6x2+1x1.5)h CM et TD)

Master Mathématiques

Exercice 21. Montrer : $\mathrm{su}(d)_{\mathbb{C}} \cong \mathrm{sl}(d, \mathbb{C})$

Solution Pour tout $X, Y \in \mathrm{su}(d)$, nous définissons une application $\psi : \mathrm{su}(d)_{\mathbb{C}} \to \mathrm{sl}(d, \mathbb{C})$ par

$$\psi(X, Y) := X + \mathrm{i}Y.$$

Nous commençons par noter que cette application est bien définie parce que $\mathrm{tr}(\psi(X, Y)) = \mathrm{tr}(X) + \mathrm{i}\mathrm{tr}(Y) = 0$. Ensuite, en utilisant Exr. 20, on peut écrire $\psi = \varphi_{\mathbb{C}}$, où $\varphi : \mathrm{su}(d) \to \mathrm{sl}(d, \mathbb{C})$ est bien défini par $\varphi(X) := X$ pour tout $X \in \mathrm{su}(d)$ (car $\mathrm{su}(d)$ est un sous-espace vectoriel réel de $\mathrm{sl}(d, \mathbb{C})$). Alors, d'après Exr. 20, ψ est un HAL complexe. Finalement, nous allons vérifier que ψ est bijectif :

ψ *est injectif :* Soit $X, Y \in \mathrm{su}(d)$ t.q. $\psi(X, Y) = X + \mathrm{i}Y = 0$ (il suffit de regarder cette condition parce que ψ est linéaire). Alors, on a $\mathrm{i}X = Y \in \mathrm{su}(d)$, c.-à-d., $(\mathrm{i}X)^* = -\mathrm{i}X$. D'autre part, $(\mathrm{i}X)^* = -\mathrm{i}X^* = \mathrm{i}X$ parce que $X \in \mathrm{su}(d)$. Il en résulte que $X = 0$, et de $X + \mathrm{i}Y = 0$, on obtient également $Y = 0$ (cf. Rem. 2.19 *(a)*).

ψ *est surjectif :* Soit $Z \in \mathrm{sl}(d, \mathbb{C})$. Alors, si on fait la décomposition

$$Z = \underbrace{\frac{Z - Z^*}{2}}_{=: X} + \mathrm{i} \underbrace{\frac{Z + Z^*}{2\mathrm{i}}}_{=: Y},$$

on trouve que $X^* = -X$, que $Y^* = -Y$ et que $\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(Y) = 0$, c.-à-d., $X, Y \in \mathrm{su}(d)$. Il s'ensuit que

$$Z = \psi((Z - Z^*)/2, (Z + Z^*)/(2\mathrm{i})).$$

□

Exercice 22. Soient $X, Y \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{C})$ t.q. $\|X\|, \|Y\| \leq \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Montrer :

$$\log(\mathrm{e}^X \mathrm{e}^Y) = X + Y + \frac{1}{2}\,[X,Y] + \frac{1}{12}\,[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}\,[Y,[X,Y]] + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

<u>Solution</u> En substituant la série (formule du produit de Cauchy)

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{ad}_X}\mathrm{e}^{t\mathrm{ad}_Y} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n-i)!i!}\,\mathrm{ad}_X^{n-i} t^i \mathrm{ad}_Y^i \\ &= 1 + \mathrm{ad}_X + t\mathrm{ad}_Y + \frac{1}{2}\mathrm{ad}_X^2 + t\mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y + \frac{t^2}{2}\,\mathrm{ad}_Y^2 + \dots\end{aligned}$$

dans la série pour la fonction $g(z)$ donnée dans Prop. 3.1, on obtient

$$\begin{aligned}g(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}_X}\mathrm{e}^{t\mathrm{ad}_Y}) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}_X}\mathrm{e}^{t\mathrm{ad}_Y} - 1)^n \\ &= 1 + \frac{1}{2}\Big(\mathrm{ad}_X + t\mathrm{ad}_Y + \frac{1}{2}\mathrm{ad}_X^2 + t\mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y + \frac{t^2}{2}\,\mathrm{ad}_Y^2 + \dots\Big) \\ &\quad - \frac{1}{6}\Big(\mathrm{ad}_X^2 + t^2\mathrm{ad}_Y^2 + t\mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y + t\mathrm{ad}_Y\mathrm{ad}_X + \dots\Big) + \dots,\end{aligned}$$

où les points représentent des termes dans lesquels des produits d'au moins trois ad_X et/ou ad_Y apparaissent. Si on fait agir cette expression sur Y, on trouve

$$g(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}_X}\mathrm{e}^{t\mathrm{ad}_Y})(Y) = Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{4}[X,[X,Y]] - \frac{1}{6}[X,[X,Y]] - \frac{t}{6}[Y,[X,Y]] + \mathcal{O}(\varepsilon^4),$$

et alors, après intégration, on a

$$\log(\mathrm{e}^X\mathrm{e}^Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

□

Exercice 23. Soient G et H des GLM simplement connexes. Montrer :

$$\mathrm{Lie}(G) \cong \mathrm{Lie}(H) \quad \Longrightarrow \quad G \cong H$$

<u>Solution</u> Soit $\varphi : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$ un IAL. Alors, d'après Thm. 3.6, il existe un HGL $\Phi : G \to H$ associé à φ. Comme φ^{-1} est également un HAL (vérifier !), il existe un HGL $\Psi : H \to G$ associé à φ^{-1}. D'après Exr. 17, le HAL $\lambda : \mathrm{Lie}(H) \to \mathrm{Lie}(H)$ associé au HGL $\Lambda := \Phi \circ \Psi : H \to H$ satisfait

$$\lambda = \varphi \circ \varphi^{-1} = 1,$$

et donc, d'après Exr. 19, on obtient $\Lambda = 1$. On procède de la même façon pour $\Psi \circ \Phi$. □

Exercice 24. Soit G un GLM connexe. Pour $i \in \{1,2\}$, soit $(G, \mathcal{V}_i, \Pi_i)$ une RGL de G et $(\mathrm{Lie}(G), \mathcal{V}_i, \pi_i)$ la RAL associée. Montrer :

$$\pi_1 \sim \pi_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \Pi_1 \sim \Pi_2$$

Solution

$\Rightarrow$: Soient π_1 et π_2 équivalents. Alors, d'après Déf. 4.4, il existe un opérateur d'entrelacement inversible $T : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ t.q., pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$ et tout $v \in \mathcal{V}_1$, on a

$$T\pi_1(X)v = \pi_2(X)Tv.$$

Comme G est connexe, pour tout $A \in G$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_N \in \mathrm{Lie}(G)$ t.q. $A = \mathrm{e}^{X_1} \ldots \mathrm{e}^{X_N}$ (cf. Prop. 2.28). Il en résulte que, pour tout $A \in G$ et tout $v \in V_1$, on a

$$\begin{aligned} T\Pi_1(A)v &= T[\Pi_1(\mathrm{e}^{X_1}) \ldots \Pi_1(\mathrm{e}^{X_N})v] = T[\mathrm{e}^{\pi_1(X_1)} \ldots \mathrm{e}^{\pi_1(X_N)}v] = \mathrm{e}^{\pi_2(X_1)} \ldots \mathrm{e}^{\pi_2(X_N)}Tv \\ &= \Pi_2(A)Tv, \end{aligned}$$

où, dans la troisième égalité, nous avons utilisé que $T\mathrm{e}^{\pi_1(X)}v = \mathrm{e}^{\pi_2(X)}Tv$ pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$ et tout $v \in \mathcal{V}_1$. Alors, on trouve que Π_1 et Π_2 sont équivalents (avec le même opérateur d'entrelacement).

$\Leftarrow$: Soient Π_1 et Π_2 équivalents. Alors, d'après Déf. 4.4, il existe un opérateur d'entrelacement inversible $T : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ t.q., pour tout $A \in G$ et tout $v \in \mathcal{V}_1$, on a

$$T\Pi_1(A)v = \Pi_2(A)Tv.$$

Alors, pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$, tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $v \in \mathcal{V}_1$, on obtient

$$T\mathrm{e}^{t\pi_1(X)}v = T\mathrm{e}^{\pi_1(tX)}v = T\Pi_1(\mathrm{e}^{tX})v = \Pi_2(\mathrm{e}^{tX})Tv = \mathrm{e}^{t\pi_2(X)}Tv.$$

En dérivant cette équation p.r. à t au point $t = 0$, on trouve que, pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$ et tout $v \in \mathcal{V}_1$, on a

$$T\pi_1(X)v = \pi_2(X)Tv.$$

Alors, π_1 et π_2 sont équivalents (avec le même opérateur d'entrelacement). $\square$

Exercice 25. Montrer :

(a) Les matrices $\{E_i\}_{i=1}^3$ dans $\mathrm{Mat}(3,\mathbb{C})$, données par

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

forment une base de $\mathrm{so}(3)$ p.r. à laquelle les constantes de structure sont données par les symboles de Levi-Civitià, c.-à-d., pour tout $i, j \in \{1,2,3\}$, on a

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} E_k.$$

En plus, nous avons que $E_i e_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} e_k$ pour tout $i, j \in \{1,2,3\}$, où $\{e_i\}_{i=1}^3$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(b) La représentation standard et la représentation adjointe de $\mathrm{so}(3)$ sont équivalentes.

(c) La représentation standard et la représentation adjointe de $\mathrm{SO}(3)$ sont équivalentes.

Solution

(a) Soit $X \in \mathrm{so}(3) = \{X \in \mathrm{Mat}(3,\mathbb{R}) \mid X^T = -X\}$. Alors, on peut écrire $X = \sum_{i=1}^3 x_i E_i$. En outre, on a $[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} E_k$ et $E_i e_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} e_k$ pour tout $i, j \in \{1,2,3\}$ (calculer !).

(b) Soit $T \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3, \mathrm{so}(3))$ défini, pour tout $i \in \{1,2,3\}$, par

$$Te_i := E_i,$$

où $\{e_i\}_{i=1}^3$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (et prolonger la définition de T de manière linéaire à la totalité de $\mathbb{R}^3$). En plus, soit $\pi : \mathrm{so}(3) \to \mathrm{gl}(\mathbb{R}^3)$ la représentation standard de $\mathrm{so}(3)$. Alors, pour tout $X = \sum_{i=1}^3 x_i E_i \in \mathrm{so}(3)$ et tout $v = \sum_{j=1}^3 v_j e_j \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} T[\pi(X)v] &= T[Xv] = \sum_{i,j=1}^{3} x_i v_j T[E_i e_j] = \sum_{i,j=1}^{3} x_i v_j T\big[\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} e_k\big] = \sum_{i,j,k=1}^{3} x_i v_j \varepsilon_{ijk} T e_k \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3} x_i v_j \varepsilon_{ijk} E_k = \sum_{i,j=1}^{3} x_i v_j [E_i, E_j] = [X, \sum_{j=1}^{3} v_j T e_j] = [X, Tv] \\ &= \mathrm{ad}_X(Tv). \end{aligned}$$

(c) Comme $\mathrm{SO}(3)$ est connexe (cf. Prop. 1.29) et comme la représentation standard π de $\mathrm{Lie}(G)$ est la RAL associée à la représentation standard Π de G et la représentation adjointe ad de $\mathrm{Lie}(G)$ est la RAL associée à la représentation standard Ad de G (cf. Prop. 2.25 *(c)*), on arrive à l'énoncé en utilisant (b) et Exr. 24.

□