UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Initiation à la recherche – TD 6

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M74 M1 Cours du 1er semestre 2014 – 2015 (2e partie ; (6x2+1x1.5)h CM et TD)

Master Mathématiques

Exercice 26. Soit G un GLM et $(G, \mathcal{V}, \Pi)$ une RGL complexe irréductible de G. Alors, pour tout $A \in \mathcal{Z}(G)$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $\Pi(A) = \lambda 1$.

Exercice 27. Soit G un GLM abélien et $(G, \mathcal{V}, \Pi)$ une RGL complexe irréductible de G. Alors, $\dim(\mathcal{V}) = 1$.

Exercice 28. Soit G un GLM et soient $(G, \mathcal{V}_i, \Pi_i)$ des RGL de G pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Alors, leur somme directe est une RGL.

Exercice 29. Pour $m \in \mathbb{N}$, soit $(\mathrm{su}(2), \mathcal{V}_m, \pi_m)$ la RAL associée à la RGL $(\mathrm{SU}(2), \mathcal{V}_m, \Pi_m)$ de Prop. 5.2, et soient $X, Y, H \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ donnés par

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Alors, pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et tout $i \in \{0, \ldots, m\}$, on a

$$\begin{aligned}
\pi_{m,\mathbb{C}}(X) z_1^{m-i} z_2^i &= -(m-i) z_1^{m-i-1} z_2^{i+1}, \\
\pi_{m,\mathbb{C}}(Y) z_1^{m-i} z_2^i &= -i z_1^{m-i+1} z_2^{i-1}, \\
\pi_{m,\mathbb{C}}(H) z_1^{m-i} z_2^i &= -(m-2i) z_1^{m-i} z_2^i.
\end{aligned}$$

Exercice 30. Soient $X, Y, H \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ les matrices de Exr. 29. Montrer :

(a) $\{X, Y, H\}$ est une base de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$.

(b) $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$ et $[X, Y] = H$

(c) Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel complexe de dimension finie et $A, B, C \in \mathrm{gl}(\mathcal{V})$ t.q.

$$[A, B] = 2B, \quad [A, C] = -2C, \quad [B, C] = A.$$

Alors, l'application $\pi : \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{gl}(\mathcal{V})$, donnée par $\pi(H) = A$, $\pi(X) = B$ et par $\pi(Y) = C$ (et prolongée de manière linéaire complexe à la totalité de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$), est une RAL complexe de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$.