UNIVERSITÉ DE TOULON

UFR Sciences et Techniques

Initiation à la recherche – TD 7

W. Aschbacher (*http ://aschbacher.univ-tln.fr/*)

M74 M1 Cours du 1er semestre 2014 – 2015 (2e partie ; (6x2+1x1.5)h CM et TD)

Master Mathématiques

Exercice 31. Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel complexe de dimension finie, $(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}),\mathcal{V},\pi)$ une RAL complexe irréductible de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ et $u\in\mathcal{V}$ un vecteur propre de $\pi(H)\in\mathrm{gl}(\mathcal{V})$ associé à la valeur propre $\alpha\in\mathbb{C}$. Montrer :

$$\pi(H)\pi(X)u = (\alpha+2)\pi(X)u$$
$$\pi(H)\pi(Y)u = (\alpha-2)\pi(Y)u$$

Solution On note d'abord que $\pi(H)\in\mathrm{gl}(\mathcal{V})$ possède toujours une valeur propre parce que $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel complexe. Ensuite, en utilisant Lem. 5.5 *(b)* (cf. Exr. 30 (b)), on a

$$[\pi(H),\pi(X)] = \pi([H,X]) = 2\pi(X).$$

Alors, on peut écrire

$$\begin{aligned}\pi(H)\pi(X)u &= \big(\pi(X)\pi(H)+[\pi(H),\pi(X)]\big)u = (\pi(X)\pi(H)+2\pi(X))u\\ &= \pi(X)\underbrace{\pi(H)u}_{=\alpha u}+2\pi(X)u = (\alpha+2)\pi(X)u.\end{aligned}$$

De la même façon, comme $[\pi(H),\pi(Y)] = \pi([H,Y]) = -2\pi(Y)$, on obtient

$$\pi(H)\pi(Y)u = (\pi(Y)\pi(H)-2\pi(Y))u = \pi(Y)\underbrace{\pi(H)u}_{=\alpha u}-2\pi(Y)u = (\alpha-2)\pi(Y)u.$$

□

Exercice 32. Soient $u\in\mathcal{V}$ comme dans Exr. 31, $N\in\mathbb{N}$ t.q. $\pi(X)^{N+1}u = 0$ et $u_0 = \pi(X)^N u \neq 0$ et $\lambda = \alpha+2N$ et $u_i = \pi(Y)^i u_0$ pour tout $i\in\mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $i\in\mathbb{N}^*$,

$$\pi(X)u_i = i(\lambda-i+1)\,u_{i-1}.$$

Solution Nous allons démontrer cet énoncé par induction.

Pour $i = 1$ *(le cas de base) :* En utilisant Lem. 5.5 *(b)* et les équations (20) et (21) du cours, on peut écrire

$$\pi(X)u_1 = \pi(X)\pi(Y)u_0 = \pi(Y)\underbrace{\pi(X)u_0}_{=0} + \underbrace{\pi(H)u_0}_{=\lambda u_0} = \lambda u_0.$$

Pour $i > 1$ *:* Comme $u_{i+1} = \pi(Y)u_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'hypothèse d'induction, Lem. 5.5 *(b)* et $\pi(H)u_i = (\lambda - 2i)u_i$ (c.-à-d., l'équation (22) du cours), nous fournit

$$\pi(X)u_{i+1} = \pi(X)\pi(Y)u_i = \pi(Y)\underbrace{\pi(X)u_i}_{=i(\lambda-i+1)u_{i-1}} + \underbrace{\pi(H)u_i}_{=(\lambda-2i)u_i} = (i+1)(\lambda - (i+1) + 1)u_i.$$

□

Exercice 33. Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel complexe muni d'une base $\{u_i\}_{i=0}^m$ et soit $\pi : \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{gl}(\mathcal{V})$ une application linéaire complexe définie par

$$\begin{aligned}
\pi(H)u_i &= (m - 2i)u_i \text{ pour tout } i \in \{0, \dots, m\}, \\
\pi(X)u_0 &= 0, \\
\pi(X)u_i &= i(m - i + 1)u_{i-1} \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, m\}, \\
\pi(Y)u_i &= u_{i+1} \text{ pour tout } i \in \{0, \dots, m-1\}, \\
\pi(Y)u_m &= 0.
\end{aligned}$$

Montrer : $(\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}), \mathcal{V}, \pi)$ est une RAL complexe irréductible de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ de dimension $m+1$.

Solution Par un calcul direct, on obtient

$$\begin{aligned}
[\pi(H), \pi(X)] &= 2\pi(X), \\
[\pi(H), \pi(Y)] &= -2\pi(X), \\
[\pi(X), \pi(Y)] &= \pi(H).
\end{aligned}$$

Alors, d'après Lem. 5.5 *(c)*, $(\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}), \mathcal{V}, \pi)$ est une RAL complexe de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$. En plus, l'irréductibilité se démontre de la même façon que dans Dém. 5.3 *(c)*. □

Exercice 34. Montrer :

(a) Les matrices $\{F_1, F_2, F_3\} \subseteq \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$, définies par $F_i := (-1)^{i+1}\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, constituent une base de $\mathrm{su}(2)$.

(b) Les constantes de structure de $\mathrm{su}(2)$ (p.r. à la base $\{F_1, F_2, F_3\}$) sont données par les symboles de Levi-Cività, c.-à-d., pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$, on a

$$[F_i, F_j] = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} F_k.$$

(c) Soit $\{E_1, E_2, E_3\}$ la base de $\mathrm{so}(3)$ définie dans Ex. 4.14 *(a)*. Alors, l'application $\varphi : \mathrm{su}(2) \to \mathrm{so}(3)$, donnée par $\varphi(F_i) = E_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, est un IAL.

Solution

(a) Pour $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{su}(2) = \{X \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}) \mid X^* = -X \text{ et } \mathrm{tr}(X) = 0\}$, on obtient

$$X^* = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = -X$$

et $\mathrm{tr}(X) = a + d = 0$, d'où $\mathrm{Re}(a) = 0$, $c = -\bar{b}$ et $d = -a$. Alors, pour tout $X \in \mathrm{su}(2)$, il existe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ t.q.

$$X = \begin{bmatrix} \mathrm{i}\alpha_3 & -\alpha_2 + \mathrm{i}\alpha_1 \\ \alpha_2 + \mathrm{i}\alpha_1 & -\mathrm{i}\alpha_3 \end{bmatrix},$$

c.-à-d., $X = 2\alpha_1 F_1 + 2\alpha_2 F_2 + 2\alpha_3 F_3$, et F_1, F_2 et F_3 sont linéairement indépendants.

(b) D'après l'équation (1) du cours, pour tout $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et tout $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\sum_{k,l=1}^{3} x_k y_l \sigma_k \sigma_l = \sum_{k=1}^{3} x_k y_k 1 + \mathrm{i} \sum_{k,l,m=1}^{3} \varepsilon_{klm} x_l y_m \sigma_k,$$

où nous avons utilisé que $(\vec{x} \wedge \vec{y})_k = \sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon_{klm} x_l y_m$ (vérifier !). Soient $i, j \in \{1, 2, 3\}$ fixés. En choisissant $\vec{x}$ t.q. $x_k = \delta_{ik}$ pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$ et $\vec{y}$ t.q. $y_l = \delta_{jl}$ pour tout $l \in \{1, 2, 3\}$, il vient que

$$\underbrace{\sum_{k,l=1}^{3} \delta_{ik}\delta_{jl}\sigma_k\sigma_l}_{=\sigma_i\sigma_j} = \underbrace{\sum_{k=1}^{3} \delta_{ik}\delta_{kl}}_{=\delta_{ij}} 1 + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{3} \sigma_k \underbrace{\sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon_{klm}\delta_{il}\delta_{jm}}_{=\varepsilon_{kij}=\varepsilon_{ijk}},$$

c.-à-d., pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$, on a

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} 1 + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \sigma_k.$$

En utilisant la définition des F_i et cette équation, on trouve

$$[F_i, F_j] = (-1)^{i+j+1}\frac{1}{4}[\sigma_i, \sigma_j] = (-1)^{i+j+1}\frac{\mathrm{i}}{4}\sum_{k=1}^{3}\underbrace{(\varepsilon_{ijk} - \varepsilon_{jik})}_{=2\varepsilon_{ijk}}\sigma_k = \sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}F_k,$$

où nous avons utilisé que $(-1)^{i+j} = (-1)^k$ si $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ et si i, j, k sont différents deux à deux.

(c) D'après sa définition, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et, pour tout $X = \sum_{i=1}^{3} x_i F_i \in \mathrm{su}(2)$ et tout $Y = \sum_{i=1}^{3} y_i F_i \in \mathrm{su}(2)$, on obtient de Ex. 4.14 *(a)* que

$$\varphi([X, Y]) = \sum_{i,j=1}^{3} x_i y_j \varphi([F_i, F_j]) = \sum_{i,j=1}^{3} x_i y_j \sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varphi(F_k) = \sum_{i,j=1}^{3} x_i y_j \underbrace{\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}E_k}_{=[E_i,E_j]}$$
$$= \Big[\sum_{i=1}^{3} x_i\varphi(F_i), \sum_{j=1}^{3} y_j\varphi(F_j)\Big] = [\varphi(X), \varphi(Y)].$$

□

Exercice 35. Montrer qu'il existe un HGL $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ qui a les propriétés suivantes :

(a) Φ est le HGL associé de l'IAL $\varphi : \mathrm{su}(2) \to \mathrm{so}(3)$ de Exr. 34 (c).

(b) Φ est surjectif.

(c) $\ker(\Phi) = \{-1, 1\}$

Solution Soit $\{E_1, E_2, E_3\}$ la base de $\mathrm{so}(3)$ définie dans Ex. 4.14 *(a)*, $\{F_1, F_2, F_3\}$ la base de $\mathrm{su}(2)$ définie dans Prop. 5.13 *(a)* et $\mathrm{ad} : \mathrm{su}(2) \to \mathrm{gl}(\mathrm{su}(2))$ la représentation adjointe de $\mathrm{su}(2)$ de Déf. 4.13 *(b)*. En plus, nous identifions les espaces vectoriels réels $\mathrm{su}(2)$ et $\mathbb{R}^3$ par l'isomorphisme $\alpha : \mathrm{su}(2) \to \mathbb{R}^3$, définie par $\alpha(F_i) := e_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors, l'application $\psi : \mathrm{su}(2) \to \mathrm{so}(3)$, définie, pour tout $X \in \mathrm{su}(2)$ et tout $v \in \mathbb{R}^3$, par

$$\psi(X)v := \alpha \circ \mathrm{ad}_X \circ \alpha^{-1}v,$$

est un IAL parce que, pour tout $v = \sum_{i=1}^{3} c_i e_i \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\psi(F_i)v = \alpha(\mathrm{ad}_{F_i}(\alpha^{-1}v)) = \sum_{j=1}^{3} c_j\alpha(\mathrm{ad}_{F_i}(F_j)) \overset{\text{Exr. 34 (b)}}{=} \sum_{j=1}^{3} c_j\alpha\Big(\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}F_k\Big) = \sum_{j,k=1}^{3} c_j\varepsilon_{ijk}e_k$$
$$\overset{\text{Ex. 4.14 (a)}}{=} \sum_{j=1}^{3} c_j E_i e_j = E_i v,$$

c.-à-d., on obtient que $\psi = \varphi$, où φ est l'IAL de Exr. 34 (c). Ensuite, nous définissons un HGL $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ pour tout $A \in \mathrm{SU}(2)$ et tout $v \in \mathbb{R}^3$ par

$$\Phi(A)v := \alpha \circ \mathrm{Ad}_A \circ \alpha^{-1} v,$$

où $\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(\mathrm{su}(2))$ est la représentation adjointe de $\mathrm{SU}(2)$ de Déf. 4.13 *(b)* (cf. également Dém. 1.40).

(a) Comme, d'après Prop. 2.25 *(c)*, on a, pour tout $X \in \mathrm{su}(2)$, que

$$\Phi(\mathrm{e}^X) = \alpha \circ \mathrm{Ad}_{\mathrm{e}^X} \circ \alpha^{-1} = \alpha \circ \mathrm{e}^{\mathrm{ad}_X} \circ \alpha^{-1} = \mathrm{e}^{\alpha \circ \mathrm{ad}_X \circ \alpha^{-1}} = \mathrm{e}^{\psi(x)} = \mathrm{e}^{\varphi(X)},$$

le HGL Φ est le HGL associé au HAL φ.

(b) Soit $A \in \mathrm{SO}(3)$. Comme $\mathrm{SO}(3)$ est connexe, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $Y_1, \ldots, Y_N \in \mathrm{so}(3)$ t.q. $A = \mathrm{e}^{Y_1} \ldots \mathrm{e}^{Y_N}$ (cf. Prop. 2.28). En plus, comme ψ est un IAL, il existe $X_1, \ldots, X_N \in \mathrm{su}(2)$ t.q. $Y_i = \psi(X_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Il en résulte que

$$A = \mathrm{e}^{Y_1} \ldots \mathrm{e}^{Y_N} = \mathrm{e}^{\psi(X_1)} \ldots \mathrm{e}^{\psi(X_N)} \overset{\text{(a)}}{=} \Phi(\mathrm{e}^{X_1}) \ldots \Phi(\mathrm{e}^{X_N}) = \Phi(\underbrace{\mathrm{e}^{X_1} \ldots \mathrm{e}^{X_N}}_{\in \mathrm{SU}(2)}),$$

et donc, Φ est surjectif.

(c) Soit $A \in \ker(\Phi) \subset \mathrm{SU}(2)$. Alors, pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\Phi(A)v = \alpha(\mathrm{Ad}_A(\alpha^{-1}(v))) = \alpha(A\alpha^{-1}(v)A^{-1}) \overset{!}{=} v,$$

d'où on obtient que $AXA^{-1} = X$ pour tout $X \in \mathrm{su}(2)$. En utilisant Prop. 1.11 *(b)* et en procédant comme dans la démonstration de Exr. 34 (a), on obtient $A = \pm 1$.

$\square$