UNIVERSITÉ DE TOULON

Théorie des opérateurs

M91 M2 Cours du 1er semestre 2015 – 2016 *Master Mathématiques* (W. Aschbacher)

Examen du 27/11/2015 (Contrôle terminal)
Durée : 120 minutes
Moyens autorisés : Un aide-mémoire constitué d'une seule feuille A4 recto-verso

---

Questions à choix multiple

Nota bene : Un point n'est accordé que si, pour chaque question, tous les items sont correctement cochés. Il n'y aura pas de demi-points ou de points négatifs.

Pour la totalité de l'examen, si rien d'autre n'est explicitement indiqué, toute C*-algèbre sera unitaire et différente de $\{0\}$.

Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

Question 1. [1.0] Soit $\mathcal{A}$ une C*-algèbre .
☒ La C*-norme est sous-multiplicative.
☐ $\|1\| = 0$
☒ Il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ t.q. $\mathcal{A}$ est isomorphe à une C*-sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Solution

☒ Déf. 1.6, 1.5 et 1.4 *(N5)*
☐ Exr. 1.8 *(c)*
☒ Thm. 1.15 ☐

Question 2. [1.0] Soit $\mathcal{A}$ une C*-algèbre et $A \in \mathcal{A}$.
☒ $\sigma(A)$ est compact.
☒ $\overline{\sigma(A^*)} = \sigma(A)$
☐ $\sigma(A) \cap \mathbb{R} = \emptyset$

Solution

☒ Prop. 1.19 *(c)*
☒ Prop. 1.21 *(b)*
☐ Prop. 1.19 *(c)* et Prop. 1.24 *(d)* ☐

Question 3. [1.0] Soit $\mathcal{A}$ une C*-algèbre et $\omega \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ avec sa représentation GNS $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$.
☐ $\dim(\mathcal{H}_\omega) = \infty$
☒ La représentation GNS est unique à équivalence unitaire près.
☒ $(\Omega_\omega, \pi_\omega(1)\Omega_\omega) \neq 0$

Solution
☐ Ex. 3.18 *(c)*
☒ Thm. 1.43
☒ Thm. 1.43 et Déf. 1.37 *(E2)* ☐

Question 4. [1.0] Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\mathcal{M}$ une W*-algèbre sur $\mathcal{H}$.
☒ $\mathcal{M}$ est unitaire.
☒ $\mathcal{M}'$ est autoadjoint.
☒ $\mathcal{M}''$ est une W*-algèbre sur $\mathcal{H}$.

Solution
☒ Déf. 2.5
☒ Déf. 2.5 et Exr. 2.7 *(a)*
☒ Déf. 2.5 et Thm. 2.9 *(d)* ☐

Question 5. [1.0] Soit $\mathcal{M}$ une W*-algèbre sur $\mathcal{H}$ et $\Omega \in \mathcal{H}$ cyclique et séparateur pour $\mathcal{M}$.
☒ $J\mathcal{M}J = \mathcal{M}'$
☐ Δ est borné.
☐ S est linéaire.

Solution
☒ Thm. 3.14
☐ Rem. 3.15
☐ Déf. 3.9 ☐

Questions ouvertes

Nota bene : Les réponses à toutes les questions sont à justifier.
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Question 6. Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre et $\omega \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$. En plus, pour tout $A \in \mathcal{A}$, l'application $\pi_\omega(A) : \mathcal{H}_\omega \to \mathcal{H}_\omega$ est donnée, pour tout $B \in \mathcal{A}$, par

$$\pi_\omega(A)[B] = [AB],$$

et nous rappelons que $\mathcal{H}_\omega$ est le complété de $\mathcal{A}/\mathcal{R}_\omega$ où $\mathcal{I}_\omega = \{A \in \mathcal{A} \,|\, \omega(A^*A) = 0\}$ et $\mathcal{R}_\omega = \{(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \,|\, A - B \in \mathcal{I}_\omega\}$ sont respectivement l'idéal à gauche et la relation d'équivalence utilisés dans la construction de la représentation GNS de $\mathcal{A}$ p.r. à ω.
Montrer (pour tout $A \in \mathcal{A}$) :

(a) [2.0] $\pi_\omega(A)$ est bien défini.

(b) [2.5] $\pi_\omega(A)$ définit un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{A}/\mathcal{R}_\omega$.

(c) [0.5] $\pi_\omega(A)$ définit un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}_\omega$.

(d) [2.0] π_ω définit une représentation de $\mathcal{A}$.

Solution Cf. Dém. 1.43 et Exr. 1.44

(a) Soit $B' \in [B]$, c.-à-d., il existe $I \in \mathcal{I}_\omega$ t.q. $B' = B + I$. Alors, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on obtient

$$\pi_\omega(A)[B'] = \pi_\omega(A)[B + I] = [AB + AI] = [AB] = \pi_\omega(A)[B],$$

où, dans la troisième égalité, nous avons utilisé que $AI \in \mathcal{I}_\omega$.

(b) Soient $B, C \in \mathcal{A}$ et $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on obtient

$$\begin{aligned}\pi_\omega(A)(\beta[B] + \gamma[C]) &= \pi_\omega(A)[\beta B + \gamma C] = [\beta AB + \gamma AC] = \beta[AB] + \gamma[AC] \\ &= \beta\pi_\omega(A)[B] + \gamma\pi_\omega(A)[C].\end{aligned}$$

Alors, π_ω définit un opérateur linéaire sur $\mathcal{A}/\mathcal{R}_\omega$. En plus, en utilisant Exr. 1.41 *(b)*, c.-à-d., $|\omega(C^*DC)| \leq \omega(C^*C)\|D\|$ pour tout $C, D \in \mathcal{A}$, on trouve, pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, que

$$\begin{aligned}\|\pi_\omega(A)[B]\|^2 &= (\pi_\omega(A)[B], \pi_\omega(A)[B]) = ([AB], [AB]) = \omega(B^*A^*AB) \\ &\overset{\text{Exr. 1.41 (b)}}{\leq} \omega(B^*B)\|A^*A\|^2 = \|A\|^2\|[B]\|^2,\end{aligned}$$

c.-à-d., $\pi_\omega(A)$ est un opérateur borné sur $\mathcal{A}/\mathcal{R}_\omega$.

(c) D'après le principe de l'extension linéaire continue (cf. Rap. 1.52), il existe une unique extension linéaire bornée sur $\mathcal{H}_\omega$ qui sera également notée $\pi_\omega(A)$.

(d) Nous allons vérifier les propriétés *(H1)* – *(H3)* d'un homomorphsime (cf. Déf. 1.3) :
(H1) : Soient $A, B \in \mathcal{A}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Alors, de manière similaire à *(b)*, pour tout $C \in \mathcal{A}$, on peut écrire que

$$\pi_\omega(\alpha A + \beta B)[C] = [(\alpha A + \beta B)C] = (\alpha\pi_\omega(A) + \beta\pi_\omega(B))[C].$$

(H2) : Soient $A, B \in \mathcal{A}$. Alors, pour tout $C \in \mathcal{A}$, on a

$$\pi_\omega(A)\pi_\omega(B)[C] = [ABC] = \pi_\omega(AB)[C].$$

(H3) : Soit $A \in \mathcal{A}$. Alors, en utilisant Déf. 1.13, on trouve, pour tout $B, C \in \mathcal{A}$, que

$$\begin{aligned}(\pi_\omega(A)^*[C],[B]) &= ([C],\pi_\omega(A)[B]) = ([C],[AB]) = \omega(C^*AB) = \omega((A^*C)^*B) \\ &= ([A^*C],[B]) = (\pi_\omega(A^*)[C],[B]).\end{aligned}$$

□

Question 7. [3.5] Soit $\mathcal{M}$ une W^*-algèbre sur $\mathcal{H}$ et $\omega \in \mathcal{E}_\mathcal{M}$ un état fidèle. En plus, soit $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ la représentation GNS de $\mathcal{M}$ p.r. à ω.
Montrer :

$$\ker(\pi_\omega) = \{0\}$$

Solution Cf. Dém. 3.6
Soit $A \in \ker(\pi_\omega)$, c.-à-d., $A \in \mathcal{M}$ t.q. $\pi_\omega(A) = 0$. En utilisant (1.22) de la représentation GNS de Thm. 1.43, nous pouvons écrire que

$$0 = \|\pi_\omega(A)\Omega_\omega\|^2 = (\pi_\omega(A)\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A^*A)\Omega_\omega) = \omega(A^*A).$$

Alors, comme $A^*A \in \mathcal{A}_+$ (cf. Prop. 1.28) et comme ω est fidèle d'après l'hypothèse, Déf. 3.4 implique que $A^*A = 0$. Finalement, la C*-propriété de Déf. 1.6 fournit que $0 = \|A\|^2 = \|A^*A\|$ d'où on obtient $A = 0$. □

Question 8. [4.5] Soit $\mathcal{M}$ une W^*-algèbre sur $\mathcal{H}$ munie d'un vecteur cyclique et séparateur $\Omega \in \mathcal{H}$. En plus, soit Δ l'opérateur modulaire p.r. à la paire $(\mathcal{M}, \Omega)$ et nous supposons que Δ est borné.
Montrer directement (c.-à-d., sans utiliser le Théorème de Tomita-Takesaki) :

$$\Delta\mathcal{M}\Delta^{-1} \subseteq \mathcal{M}$$

Solution Cf. Dém. 3.14
Soient $A, B, C \in \mathcal{M}$. Alors, en utilisant (3.28) de Déf. 3.9, on calcule

$$\begin{aligned}(SAS)BC\Omega &= SAC^*B^*\Omega = BCA^*\Omega, \\ B(SAS)C\Omega &= BSAC^*\Omega = BCA^*\Omega.\end{aligned}$$

Il en résulte que $[SAS, B]C\Omega = 0$ pour tout $A, B, C \in \mathcal{M}$, c.-à-d., on obtient $SAS \in \mathcal{M}'$ pour tout $A \in \mathcal{M}$ ou, écrit autrement, $S\mathcal{M}S \subseteq \mathcal{M}'$. De manière analogue, on trouve $[FAF, B]C\Omega = 0$ pour tout $A, B, C \in \mathcal{M}'$, c.-à-d., $FAF \in \mathcal{M}'' = \mathcal{M}$ pour tout $A \in \mathcal{M}'$ ou, écrit autrement, $F\mathcal{M}'F \subseteq \mathcal{M}$. Ensuite, en utilisant Exr. 3.12 *(d)*, *(e)*, on trouve

$$\Delta\mathcal{M}\Delta^{-1} = FS\mathcal{M}SF \subseteq F\mathcal{M}'F \subseteq \mathcal{M}.$$

□