

M22 L1 Cours du 2e semestre 2024 – 2025 Licence Mathématiques (W. Aschbacher)

Contrôle continu du 22/04/2025 de 15h45 à 17h45

Matériel autorisé : Un aide-mémoire constitué d'une seule feuille A4 recto-verso

Questions à choix multiple

Nota bene : Un point n'est accordé que si, pour chaque question, tous les items sont correctement cochés. Il n'y aura pas de demi-points ou de points négatifs.

Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

Question 1. [1.0] Soit Σ un système 2×3 à coefficients réels non tous nuls qui est à résoudre sur \mathbb{R} .

- En général, résoudre Σ revient à chercher les points communs à deux droites.
- Σ a une infinité de solutions ou l'ensemble des solutions de Σ est vide.
- Σ a exactement une solution.

Solution

- 332
- 333
- 333

Question 2. [1.0] Soit \mathbb{R}^n l'espace vectoriel habituel.

- L'addition sur \mathbb{R}^n est une loi de composition interne.
- $(\lambda + \mu)x = \lambda + (\mu + x)$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $x, y \in \mathbb{R}^n$

Solution

- 357 Déf.3
- 360 Thm.1
- 360 Thm.1

Question 3. [1.0] Soient $(G, *)$ un groupe, H un sous-groupe de G et e le neutre de G .

- $e \notin H$
- Le symétrique x^{-1} de $x \in H$ pour $*$ satisfait $x^{-1} \in H$.
- $x * y \in G$ pour tout $x, y \in H$

Solution

- 399 Déf.17
- 399 Déf.17
- 379 Déf.7

Question 4. [1.0] Soient $A, B \in T_n^s(\mathbb{R})$ avec $A = (a_{i,j})_{i,j}$ et $B = (b_{i,j})_{i,j}$.

- $A + B \in T_n^s(\mathbb{R})$
- $AB \in T_n^s(\mathbb{R})$
- $\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = 0$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i > j$

Rappel : $T_n^s(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients dans \mathbb{R} .

Solution

- 445 Prop.9
- 445 Prop.9
- 445 Dém. de Prop.9

Question 5. [1.0] Soit $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ une famille de vecteurs du \mathbb{K} -espace vectoriel E et $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ où $n \geq 1$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

- $v \in E$
- Si \mathcal{F} est libre et $v = 0$, alors $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.
- Si \mathcal{F} est libre et $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors $v = 0$.

Solution

- 397 Déf.15
- 577 Déf.5
- 398 Thm.7

Question 6. [1.0] Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_{n+1})$ une famille génératrice du \mathbb{K} -espace vectoriel E .

- $\mathcal{F} \setminus \{v_{n+1}\}$ est une famille génératrice de E .
- $\mathcal{F} \setminus \{v_{n+1}\}$ est une famille génératrice de E si $v_{n+1} \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$.
- $\mathcal{F} \cup \{v_{n+1}\}$ est une famille génératrice de E .

Solution

- Contrexemple* : $E = \mathbb{R}^3$, $n = 2$, $v_i = e_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ (base canonique)
- 627 Prop.1
- $\mathcal{F} \cup \{v_{n+1}\} = \mathcal{F}$

Question 7. [1.0] Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g : F \rightarrow E$ tel que $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$.

- f est un isomorphisme.
- $g \in \mathcal{L}(F, E)$
- g est un isomorphisme.

Solution

- 697 Prop.-Déf.1
- 697 Prop.-Déf.1
- 697 Prop.-Déf.1

Question 8. [1.0] Soient $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$, \mathcal{C} la base canonique de E , $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ où $u_1 := (1, 0)$ et $u_2 := (1, 1)$ et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ défini par $f(x, y, z) := (x, y)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

- $\text{Mat}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\text{Mat}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\text{Mat}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solution

757 Déf.2 et $f(e_1) = (1, 0) = u_1$, $f(e_2) = (0, 1) = u_2 - u_1$ et $f(e_3) = 0$

757 Déf.2

757 Déf.2

Question 9. [1.0] Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et tout $\mu \in \mathbb{R}$, soit $D_i(\mu) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de dilatation.

$D_i(\mu)D_i(\nu) = D_i(\mu + \nu)$ pour tous $i \in \{1, \dots, n\}$ et tous $\mu, \nu \in \mathbb{R}$

$D_1(1) = 0$

$D_i(\mu)D_j(\nu) = D_j(\nu)D_i(\mu)$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et tous $\mu, \nu \in \mathbb{R}$

Solution

822 Déf.2

822 Déf.2

822 Déf.2

Question 10. [1.0] Soit $\sigma \in S_n$ et soit m le nombre d'orbites de σ .

$m > n$

Si σ est un p -cycle, alors $m \leq n - 1$.

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-m}$

Solution

Contreexemple : La permutation identité a n orbites.

864 Déf.1 et 870 Ex.5, 5.

870 Déf.4

Questions ouvertes

Nota bene : Les réponses à toutes les questions sont à justifier. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Question 11. [4.5] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}^n$ les colonnes de A . Montrer que

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, \dots, C_n).$$

Indication : Utiliser $f_A e_i = A e_i = C_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ où (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^n .

Solution En utilisant [771 Prop.-Déf.1] et [717 Déf.9], nous avons

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(f_A) = \dim(\text{Im}(f_A)),$$

où $f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est l'endomorphisme canoniquement associé à A de [763 Déf.3]. Par ailleurs, en utilisant [711 Déf.7], la base canonique (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n , la linéarité de f_A , [763 Déf.3],

l'indication provenant de [437 Rem.6,1.] et [593 Prop.-Déf.2], nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(f_A) &= \{f_A x \mid x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\} \\
 &= \{f_A(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\} \\
 &= \{x_1 f_A e_1 + \dots + x_n f_A e_n \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\} \\
 &= \{x_1 A e_1 + \dots + x_n A e_n \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\} \\
 &= \{x_1 C_1 + \dots + x_n C_n \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\} \\
 &= \text{Vect}(C_1, \dots, C_n).
 \end{aligned}$$

Comme, d'après [644 Déf.4], $\text{rg}(C_1, \dots, C_n) = \dim(\text{Vect}(C_1, \dots, C_n))$, nous arrivons à la conclusion. \square

Question 12. [3.0] Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donné par

$$A := \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Utiliser l'algorithme du pivot de Gauss **sur les colonnes** pour déterminer $\text{rg}(A)$ en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

Solution Nous utilisons les opérations élémentaires de [820 Déf.1] sur les colonnes comme discuté dans [837 Ex.11]. L'algorithme du pivot de Gauss sur les colonnes fournit par exemple la matrice triangulaire inférieure suivante :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_1} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - a C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 - 2a & 0 \\ 3 & -3a & 2 \end{pmatrix}$$

Comme le rang est préservé par équivalences d'après [825 Prop.3] et comme $\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, C_2, C_3)$ d'après Question 11, nous obtenons

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3, & a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}, \\ 2, & a = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

\square

Question 13. [2.5] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $m := n^2$. Montrer qu'il existe un polynôme annulateur non nul d'ordre $\leq m$ pour A , c.-à-d., qu'il existe $(a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$a_0 1 + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_m A^m = 0.$$

Indication : Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Solution Comme, d'après [636 Ex.6, 6.], $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = m$, la famille

$$(1, A, A^2, \dots, A^m),$$

de cardinalité $m + 1$, ne peut être libre car, d'après [640 Thm.5], toute famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède au plus m éléments.

Par ailleurs, comme une famille est libre si et seulement si sa seule combinaison linéaire nulle est la combinaison linéaire triviale (cf. [577 Déf.5]), il existe une combinaison linéaire nulle non triviale, c.-à-d., il existe $(a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ tel que $\sum_{i=0}^m a_i A^i = 0$. \square