

M22 L1 Cours du 2e semestre 2024 – 2025 Licence Mathématiques (W. Aschbacher)

Contrôle terminal du 14/05/2025 de 09h30 à 11h30

Matériel autorisé : Un aide-mémoire constitué d'une seule feuille A4 recto-verso

Questions à choix multiple

Nota bene : Un point n'est accordé que si, pour chaque question, tous les items sont correctement cochés. Il n'y aura pas de demi-points ou de points négatifs.

Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

Question 1. [1.0] Soient Σ et Σ' deux systèmes $p \times n$ et soient S et S' les ensembles des solutions respectifs.

- $S \subseteq \mathbb{C}^p$
- $0 \in S_h$
- Si $x \in S$ et $y \in S_h$, alors $x + y \in S$.

Solution

- 331
- 342
- 344 Thm.9

Question 2. [1.0] Soit \mathbb{R}^n l'espace vectoriel habituel.

- $(\mathbb{R}^n, +)$ est un groupe commutatif.
- L'inverse de $x \in \mathbb{R}^n$ pour $+$ est égal à $(-1)x$.
- La multiplication externe est une application $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Solution

- 358 Prop.1, 397 Déf.15
- 398 Cor.1
- 359 Déf.4, 397 Déf.15

Question 3. [1.0] Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre habituelle.

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est unitaire.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est commutatif.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est intègre.

Solution

- 442 Cor.1, 399 Déf.16
- 389 Ex.14,2.
- 393 Ex.15,3.

Question 4. [1.0] Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, soit $E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la (i, j) -ième matrice élémentaire.

- $(E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,n})$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} E_{i,j}$ pour tout $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $E_{i,j} E_{k,l} = \delta_{i,j} E_{k,l}$ pour tous $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$

Solution

584 Ex.15,4.

433

468 Exr.9.1

Question 5. [1.0] Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotent d'indice de nilpotence p .

- $A^{p+1} = 0$
- $A^{p-1} \neq 0$
- $(A + A)^p = 0$

Solution

447 Déf.15

447 Déf.15

448 Ex.6,3.

Question 6. [1.0] Soit E un espace vectoriel complexe, \mathcal{F} une famille de vecteurs de E et F un sous-espace vectoriel de E .

- $F \subseteq \text{Vect}(\mathcal{F})$ si $\mathcal{F} \subseteq F$.
- $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$ si \mathcal{F} est une famille génératrice de F .
- $\text{Vect}(\text{Vect}(\text{Vect}(\mathcal{F}))) = \text{Vect}(\mathcal{F})$

Solution

593 Prop.-Déf.2,1.

595 Prop.5

595 Prop.6,2.

Question 7. [1.0] Soit α le premier coefficient de $\underset{|c}{u}$ où $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

- $\alpha = 3$
- $\alpha = 2$
- $\alpha = -2$

Rappel: \mathcal{C} est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Solution

638 Ex.10,1.

638 Ex.10,1.

638 Ex.10,1.

Question 8. [1.0] Soient E un espace vectoriel complexe, $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de E et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

- $f = g$ si $f(\varepsilon_i) = g(\varepsilon_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.
- $f = g$ s'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ t.q. $f(\varepsilon_i) = g(\varepsilon_i)$.
- $f \neq g$ s'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ t.q. $f(\varepsilon_i) \neq g(\varepsilon_i)$.

Solution

☒ 707 Thm.3

Contrexemple : Pour $E = \mathbb{R}^2$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la base canonique, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$f = f_A$ et $g = f_B$ (cf. 763 Déf.3), on a $f_A \varepsilon_1 = f_B \varepsilon_1 = \varepsilon_1$

☒ Contraposée de ($f = g \Rightarrow f(\varepsilon_i) = g(\varepsilon_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$)

Question 9. [1.0] Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, soit $S_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de transposition.

- $S_{i,j} = 1_n - E_{i,j} - E_{j,i} + E_{i,i} + E_{j,j}$
- $S_{i,j}^2 = 1_n$
- $S_{i,j} = S_{j,i}$

Solution

822 Déf.2,3.

☒ 824 Prop.1

☒ 822 Déf.2,3.

Question 10. [1.0] Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 7 & 9 & 10 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in S_{10}$.

- Le support de σ est égal à $\{1, 2, 5, 7, 8, 9\}$.
- σ est un produit de 4 cycles.
- Le nombre d'orbites de σ est égal à 4.

Solution

865 Déf.2

864 Déf.1,1.; nous avons $\sigma = (132)(571069)$.

☒ 869 Déf.3

Questions ouvertes

Nota bene : Les réponses à toutes les questions sont à justifier. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Question 11. [2.0] Soient E et F des espaces vectoriels complexes et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\text{Ker}(\lambda f) = \text{Ker}(f).$$

Solution (cf. 712 Rem.4)

Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ fixé.

" $\text{Ker}(\lambda f) \subseteq \text{Ker}(f)$ " :

Soit $x \in \text{Ker}(\lambda f)$. Alors, $0 = (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ d'où $f(x) = 0$ car $\lambda \neq 0$, c.-à-d., $x \in \text{Ker}(f)$.

" $\text{Ker}(\lambda f) \supseteq \text{Ker}(f)$ " :

Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Alors, $f(x) = 0$ d'où $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = 0$, c.-à-d., $x \in \text{Ker}(\lambda f)$. \square

Question 12. [5.0] Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, soit $\mathcal{U} = (u_1, u_2)$ défini par $u_1(x) = e^x$ et $u_2(x) = e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et soit $f \in \mathcal{L}(F)$ défini, pour tout $u \in F$, par

$$fu = \frac{d}{dx} u.$$

Utiliser la formule de changement de base pour calculer $\text{Mat}_{\mathcal{V}}(f)$ à partir de $\text{Mat}_{\mathcal{U}}(f)$ où $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ est défini par $v_1(x) = \cosh(x)$ et $v_2(x) = \sinh(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Rappels: \mathcal{U} et \mathcal{V} sont des bases de F et $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ et $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution Nous utilisons les rappels (cf. 596 Ex.25,1., TD 12 (a)). Comme $fu_1 = u_1$ et $fu_2 = -u_2$, nous avons

$$\text{Mat}_{\mathcal{U}}(f) = \begin{pmatrix} | & | \\ fu_1 & fu_2 \\ |_{\mathcal{U}} & |_{\mathcal{U}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & -u_2 \\ |_{\mathcal{U}} & |_{\mathcal{U}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, comme $v_1 = (u_1 + u_2)/2$ et $v_2 = (u_1 - u_2)/2$, la matrice de passage a la forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{V}}(\text{id}) = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ |_{\mathcal{U}} & |_{\mathcal{U}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors, comme $\det(\text{Mat}_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{V}}(\text{id})) = -1/2$, nous obtenons

$$(\text{Mat}_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{V}}(\text{id}))^{-1} = (-2) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

d'où, avec la formule de changement de base (769 Thm.2),

$$\text{Mat}_{\mathcal{V}}(f) = (\text{Mat}_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{V}}(\text{id}))^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{U}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{V}}(\text{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque: Comme $fv_1 = v_2$ et $fv_2 = v_1$, nous confirmons directement $\text{Mat}_{\mathcal{V}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. \square

Question 13. [3.0] Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n et soit \mathcal{B} une base de E . Montrer que

$$\det_{\mathcal{B}} \in \mathcal{L}_n(E).$$

Rappel: $\mathcal{L}_n(E)$ est l'ensemble des formes n -linéaires sur E .

Solution (cf. 887 Prop.6)

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$ quelconque mais fixé. Alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, tous $u_1, \dots, u_n \in E$ et tout $v_k \in E$, nous avons (886 Déf.8)

$$\begin{aligned}
 & \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_{k-1}, \lambda u_k + \mu v_k, u_{k+1}, \dots, u_n) \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) u_{\sigma(1),1} \dots u_{\sigma(k-1),k-1} (\lambda u_{\sigma(k),k} + \mu v_{\sigma(k),k}) u_{\sigma(k+1),k+1} \dots u_{\sigma(n),n} \\
 &= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) u_{\sigma(1),1} \dots u_{\sigma(k-1),k-1} u_{\sigma(k),k} u_{\sigma(k+1),k+1} \dots u_{\sigma(n),n} \\
 &\quad + \mu \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) u_{\sigma(1),1} \dots u_{\sigma(k-1),k-1} v_{\sigma(k),k} u_{\sigma(k+1),k+1} \dots u_{\sigma(n),n} \\
 &= \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_k, \dots, u_n) + \mu \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, v_k, \dots, u_n),
 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\left. \begin{array}{c} u_i \\ | \\ \mathcal{B} \end{array} \right| = \begin{pmatrix} u_{1,i} \\ \vdots \\ u_{n,i} \end{pmatrix}, \quad \left. \begin{array}{c} v_i \\ | \\ \mathcal{B} \end{array} \right| = \begin{pmatrix} v_{1,i} \\ \vdots \\ v_{n,i} \end{pmatrix},$$

et que $(\lambda u_k \left. \begin{array}{c} | \\ | \\ \mathcal{B} \end{array} \right| + \mu v_k \left. \begin{array}{c} | \\ | \\ \mathcal{B} \end{array} \right|) = \lambda \left. \begin{array}{c} | \\ | \\ \mathcal{B} \end{array} \right| u_k + \mu \left. \begin{array}{c} | \\ | \\ \mathcal{B} \end{array} \right| v_k$ (639 Prop.5,2.).

Par ailleurs, nous avons $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}$ pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. □