

## Algèbre 2

M22 L1 Cours du 2e semestre 2025 – 2026 Licence Mathématiques (W. Aschbacher)

Contrôle continu du 22/04/2026 de 10h00 à 12h00

Matériel autorisé : Un aide-mémoire constitué d'une seule feuille A4 recto-verso

### Questions à choix multiple

**Nota bene** : Un point n'est accordé que si, pour chaque question, tous les items sont correctement cochés. Il n'y aura pas de demi-points ou de points négatifs.

Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

**Question 1.** [1.0] Lesquelles sont des opérations élémentaires sur  $\Sigma$ , un système  $3 \times 4$  ?

- $L_1 \leftrightarrow L_3$
- $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_4$
- $L_1 \leftarrow \alpha L_2$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$

Solution

- 321 Déf.5
- 331 ( $L_4$  n'existe pas)
- 321 Déf.5

**Question 2.** [1.0] Soit  $\mathbb{R}^n$  le  $\mathbb{R}$ -ev habituel.

- $\lambda^2 x \in \mathbb{R}^n$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tout  $x \in \mathbb{R}^n$
- $\lambda x^2 \in \mathbb{R}^n$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tout  $x \in \mathbb{R}^n$
- $0 + x = x + 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$

Solution

- 359 Déf.4
- 357 Déf.3, 359 Déf.4
- 358 Prop.1

**Question 3.** [1.0] Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -ev.

- $+ : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$
- $\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$
- $0_E$  est absorbant pour la loi de composition interne.

Solution

- 397 Déf.15
- 397 Déf.15
- 398 Thm.7

**Question 4.** [1.0] Soit  $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  quelconque.

- $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
- $\text{tr}(A) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}$
- $\text{tr}(A^2) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2$

Solution

- 463 Déf.16
- 463 Déf.16
- 463 Prop.14

**Question 5.** [1.0] Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev,  $I$  un ensemble,  $\mathcal{F}$  une famille de vecteurs de  $E$  indexée par  $I$  et  $\mathcal{G}$  une sous-famille de  $\mathcal{F}$ .

- $\mathcal{F} : I \rightarrow E$
- $I$  est dénombrable.
- $\mathcal{G} : J \rightarrow E$  pour un  $J \subseteq I$  tel que  $\mathcal{G}(j) = \mathcal{F}(j)$  pour tout  $j \in J$

Solution

- 574 Déf.1
- 574 Ex.1,2.
- 575 Déf.2

**Question 6.** [1.0] Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie.

- $E$  admet une famille génératrice finie.
- $E$  admet une famille libre.
- $E$  admet une famille libre et génératrice.

Solution

- 626 Déf.1
- 628 Thm.1
- 628 Thm.1

**Question 7.** [1.0] Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

- $f(\lambda u) = \lambda f(u)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tout  $u \in E$
- Si  $f$  est bijectif,  $f^{-1}$  satisfait  $f^{-1}(u+v) = f^{-1}(u) + f^{-1}(v)$  pour tous  $u, v \in E$ .
- Si  $f$  est injectif, alors  $f$  est surjectif.

Solution

- 694 Déf.1
- 697 Prop.-Déf.1
- 739 Cor.7

**Question 8.** [1.0] Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ .

- $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$
- L'application  $\mathcal{L}(E) \ni h \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) \in \mathcal{M}_{\dim(E)}(\mathbb{C})$  est un isomorphisme d'algèbres.
- Si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$  commutent, alors  $f$  et  $g$  commutent.

Solution

- 767 Prop.10
- 767 Thm.1
- 767 Cor.2

**Question 9.** [1.0] Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  et  $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  la transvection  $P = T_{1,2}(1)$ .

- $(AP)_{1,2} = 1$
- $(PA)_{1,2} = 2$
- $(PAP)_{1,2} = 3$

Solution

- 822 Déf.2
- 822 Déf.2
- 822 Déf.2

**Question 10.** [1.0] Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -ev de dimension  $n$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $f \in A_n(E)$ .

- Il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $f = \lambda \det_{\mathcal{B}}$ .
- $f(\mathcal{B}) = \det(f)$
- $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) \neq 0$

Solution

- 888 Thm.7
- 892 Thm.-Déf.1
- 889 Thm.8, 887 Prop.7

## Questions ouvertes

**Nota bene :** Les réponses à toutes les questions sont à justifier. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

**Question 11.** [3.5] Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tel que  $A - 1$  soit nilpotent (un tel  $A$  est dit "unipotent"). Montrer que  $A$  est inversible et calculer son inverse.

*Indication :* Utiliser la formule du binôme de Newton et y séparer l'identité 1.

Solution

Comme  $A - 1$  est nilpotent, il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $(A - 1)^p = 0$ . Afin de calculer la puissance de  $A - 1$ , nous utilisons l'indication, c.-à-d., la formule du binôme de Newton (cf. 446 Prop.10). Cette formule est applicable car  $A(-1) = -A = (-1)A$ , c.-à-d.,  $A$  et  $-1$  commutent. Nous

obtenons alors

$$\begin{aligned}(A - 1)^p &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k (-1)^{p-k} = (-1)^p \binom{p}{0} A^0 + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} A^k (-1)^{p-k} \\ &= (-1)^p 1 + A \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} A^{k-1} (-1)^{p-k}.\end{aligned}$$

Comme  $(A - 1)^p = 0$ , il en résulte que  $1 = (-1)^{p+1} A \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} A^{k-1} (-1)^{p-k}$ . En posant

$$B := (-1)^{p+1} \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} A^{k-1} (-1)^{p-k} = \sum_{l=0}^{p-1} \binom{p}{l+1} (-1)^l A^l,$$

nous obtenons  $AB = 1$ . Comme  $[A, B] = 0$ , nous avons également  $BA = 1$  (cf. 442 Déf.10; ou nous utilisons 770 Thm.3) d'où  $A^{-1} = B$ .  $\square$

**Question 12.** [4.0] Soient  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  le  $\mathbb{R}$ -ev habituel de toutes les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et

$$\begin{aligned}P &:= \{f \in E \mid f(-x) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}, \\ I &:= \{f \in E \mid f(-x) = -f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Montrer que  $E = P \oplus I$ .

*Indication* : Comment une fonction  $f \in E$  quelconque s'écrit-elle à l'aide de sa partie paire (c.-à-d.,  $(f(x) + f(-x))/2$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ) et sa partie impaire ?

**Solution** (Cf. 605 Ex.32)

Nous devons commencer par montrer que  $P$  et  $I$  sont des sev de  $E$ . Pour ce faire (cf. 588 Ex.17,3.), soient d'abord  $f, g \in P$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors, nous avons, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}(f + g)(-x) &= f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x), \\ (\lambda f)(-x) &= \lambda f(-x) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x).\end{aligned}$$

Comme, en plus,  $0_E \in P$  ( $0_E(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ), [586 Prop.3] fournit que  $P$  est un sev de  $E$ . De manière analogue, pour tous  $f, g \in I$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , nous avons, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}(f + g)(-x) &= f(-x) + g(-x) = (-f(x)) + (-g(x)) = -(f(x) + g(x)) = -((f + g)(x)) \\ &= -(f + g)(x), \\ (\lambda f)(-x) &= \lambda f(-x) = \lambda(-f(x)) = -(\lambda f(x)) = -((\lambda f)(x)) = -(\lambda f)(x),\end{aligned}$$

et comme  $0_E \in I$ ,  $I$  est également un sev de  $E$ .

Ensuite, en utilisant l'indication, nous écrivons, pour tout  $f \in E$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\in P} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\in I},$$

c.-à-d., nous obtenons  $E = P + I$ . Afin de montrer que  $E = P \oplus I$ , il suffit de montrer que  $P \cap I = \{0_E\}$  grâce à [604 Prop.9; TD 13a)]. Soit donc  $f \in P \cap I$ . Alors, nous avons, d'une

part,  $f(-x) = f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et, d'autre part,  $f(-x) = -f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Il en résulte que  $f(x) = -f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , c.-à-d.,  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et donc  $f = 0_E$ .  $\square$

**Question 13.** [2.5] Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -ev et soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  bijectif. Montrer que la fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $f$  satisfait

$$f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E).$$

Solution (Cf. 697 Prop.-Déf. 1)

Comme, par hypothèse,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est bijectif,  $f$  possède une réciproque  $g := f^{-1} : F \rightarrow E$  (cf. le cours d'analyse). Nous devons alors montrer que  $g$  est linéaire. Comme  $u = f(g(u)) = g(f(u))$  pour tout  $u \in F$  et comme  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , nous avons, pour tout  $u, v \in F$ ,

$$g(u + v) = g(f(g(u)) + f(g(v))) = g(f(g(u) + g(v))) = g(u) + g(v),$$

et, de manière analogue, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  et tout  $u \in F$ ,

$$g(\lambda u) = g(\lambda f(g(u))) = g(f(\lambda g(u))) = \lambda g(u).$$

Alors, [695 Prop.1] nous fournit que  $g \in \mathcal{L}(F, E)$ .  $\square$