UNIVERSITÉ DE TOULON

Algèbre 2

M22 L1 Cours du 2e semestre 2025 – 2026 *Licence Mathématiques* (W. Aschbacher)
Contrôle terminal du 12/05/2026 de 14h00 à 16h00
Matériel autorisé : Un aide-mémoire constitué d'une seule feuille A4 recto-verso

Questions à choix multiple

Nota bene : Un point n'est accordé que si, pour chaque question, tous les items sont correctement cochés. Il n'y aura pas de demi-points ou de points négatifs.

Lesquels des énoncés suivants sont justes ?

Question 1. [1.0] Soit à résoudre sur $\mathbb{C}$ le système Σ : $\begin{cases} 2\mathrm{i}x + y & = \mathrm{i} \\ x - \frac{\mathrm{i}}{2}y & = \frac{1}{2} \end{cases}$.

☐ Σ possède une unique solution.
☐ L'ensemble des solutions de Σ est égal à $\{(z, \mathrm{i} - 2\mathrm{i}z) \in \mathbb{C}^2 \,|\, z \in \mathbb{R}\}$.
☐ Si (x, y) et (x', y') sont des solutions, alors $(x + x', y + y')$ est une solution.

Solution
☐ 319 Thm.2
☐ L'ensemble des solutions de Σ est égal à $\{(z, \mathrm{i} - 2\mathrm{i}z) \in \mathbb{C}^2 \,|\, z \in \mathbb{C}\}$ (résoudre sur $\mathbb{C}$).
☐ *Contrexemple :* $(2x, 2y)$ n'est pas solution si (x, y) l'est (système non homogène).

Question 2. [1.0] Soient $\mathbb{R}^n$ le $\mathbb{R}$-ev habituel et $\cdot$ sa multiplication par un scalaire.

☐ $\cdot$ est une application $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
☐ $\cdot$ satisfait $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.
☐ $\cdot$ satisfait $(\lambda\mu)x = \mu(\lambda x)$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Solution
☐ 359 Déf.4
☒ 360 Thm.1,1.
☒ 360 Thm.1,2.

Question 3. [1.0] Soit $(G, *)$ un groupe et $e, e' \in G$.

☐ $e' = e$ si $e * a = a * e = a$ et $e' * a = a * e' = a$ pour tout $a \in G$.
☐ $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$ pour tous $a, b \in G$
☐ Si $b * a = c * a$ pour certains $a, b, c \in G$, alors $b = c$.

Solution
☒ 383 Thm.1,1.
☐ *Contrexemple :* $(12), (123) \in S_3$
☒ 386 Prop.4,2.

Question 4. [1.0] Soient $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$ et soit $C = (c_{i,j})_{i,j} = AB$.
☐ $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$ pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$ et tout $j \in \{1, \dots, r\}$
☐ $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k}b_{k,j}$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et tout $j \in \{1, \dots, p\}$
☐ $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{r} a_{i,k}b_{k,j}$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ et tout $j \in \{1, \dots, q\}$

Solution
☐ 435 Déf.8
☐ 435 Déf.8
☐ 435 Déf.8

Question 5. [1.0] Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $\mathcal{F}$ une famille de E et $\mathcal{G}$ une sous-famille de $\mathcal{F}$.
☐ Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathcal{G}$ est libre.
☐ Si $\mathcal{F}$ est lié, alors $\mathcal{G}$ est lié.
☐ Si $\mathcal{G}$ est lié, alors $\mathcal{F}$ est lié.

Solution
☒ 579 Rem.3
☐ 579 Ex.9
☒ 579 Rem.3

Question 6. [1.0] Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F et G des sev de E.
☐ $\dim(F \times G) = \dim(F)\dim(G)$
☐ $\dim(F \cap G) = \dim(F) - \dim(G)$
☐ $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$

Solution
☐ 636 Prop.4
☐ *Contrexemple :* $F = G$ et $\dim(F) > 0$
☐ *Contrexemple :* $F = G$ et $\dim(F) > 0$

Question 7. [1.0] Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
☐ $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\ker(f))$
☐ $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(\mathcal{B}))$ pour toute base $\mathcal{B}$ de E
☐ $\mathrm{rg}(f) \geq \mathrm{rg}(f(\mathcal{F}))$ pour toute famille $\mathcal{F}$ de E

Solution
☒ 735 Thm.11
☒ 717 Prop.10
☒ 719 Prop.12,3.

Question 8. [1.0] Soient $E = \mathbb{R}^2$ le $\mathbb{R}$-ev habituel, $\mathcal{C}$ sa base canonique, $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et soit $f = \mathrm{id} \in \mathcal{L}(E)$.

☐ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Solution</u>

☒ 757 Déf.2

☐ 757 Déf.2 : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

☒ 757 Déf.2

Question 9. [1.0] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice obtenue à partir de A par l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow \mu C_1$.

☐ $B = D_1(\mu)A$

☐ $B = AD_1(\mu)$

☐ $B = AD_1(\frac{1}{\mu})$

<u>Solution</u>

☐ 823

☒ 823

☐ 823

Question 10. [1.0] Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base de E.

☐ $\det_{\mathcal{B}} : E \times E \times E \to E$

☐ $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) + \det_{\mathcal{B}}(v, u, w) = 0$ pour tous $u, v, w \in E$

☐ Pour toute base $\mathcal{B}'$ de E, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$.

<u>Solution</u>

☐ 886 Déf.8

☒ 889 Cor.2

☒ 889 Prop.8

Questions ouvertes

Nota bene : Les réponses à toutes les questions sont à justifier. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Question 11. [4.0] Soit $\mathcal{K} = \mathrm{Vect}(\{[A,B] \mid A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\})$ où $[A,B] = AB - BA$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la trace $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ satisfait

$$\ker(\mathrm{tr}) = \mathcal{K}.$$

Indication: Pour l'une des deux inclusions, utiliser la base canonique $(E_{i,j})_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, se rappeler que $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$ pour tous $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$, calculer $[E_{i,k}, E_{k,j}]$ et discuter les cas $i \neq j$ et $i = j$.

Solution Nous montrons les deux inclusions séparément.

"$\ker(\mathrm{tr}) \supseteq \mathcal{K}$":
Soit $K \in \mathcal{K}$. Alors, d'après la définition du Vect, il existe $n \in \mathbb{N}$, des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ et des matrices $A_1, B_1, \ldots, A_n, B_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $K = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A_iB_i - B_iA_i)$. Comme nous savons que la trace est linéaire [463 Prop.14] et qu'elle a la propriété fondamentale (de cyclicité) [464 Prop.15], nous obtenons

$$\mathrm{tr}(K) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{(\mathrm{tr}(A_iB_i) - \mathrm{tr}(B_iA_i))}_{=0} = 0.$$

"$\ker(\mathrm{tr}) \subseteq \mathcal{K}$":
Nous utilisons l'indication et calculons $[E_{i,k}, E_{k,j}] = E_{i,k}E_{k,j} - E_{k,j}E_{i,k} = E_{i,j} - \delta_{i,j}E_{k,k}$ pour tous $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ d'où, pour les deux cas $i \neq j$ et $i = j$,

$$E_{i,j} = [E_{i,k}, E_{k,j}] \in \mathcal{K} \text{ pour tous } i, j, k \in \{1, \ldots, n\} \text{ tels que } i \neq j, \tag{1}$$
$$E_{i,i} - E_{k,k} = [E_{i,k}, E_{k,i}] \in \mathcal{K} \text{ pour tous } i, k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2}$$

Comme, pour tout $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nous avons $A = A_1 + A_2$ où $A_1 := \sum_{i \neq j} a_{i,j}E_{i,j}$ et $A_2 := \sum_{i=1}^n a_{i,i}E_{i,i}$, nous obtenons $A_1 \in \mathcal{K}$ grâce à (1). Par ailleurs, si $A \in \ker(\mathrm{tr})$, (2) fournit, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathcal{K} \ni \sum_{i=1}^n a_{i,i}(E_{i,i} - E_{k,k}) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}E_{i,i} - \underbrace{\mathrm{tr}(A)}_{=0} E_{k,k} = A_2.$$

□

Question 12. [3.0] Soit $E = \mathbb{R}^n$ le $\mathbb{R}$-ev habituel, soit $\sigma \in S_n$ fixé et soit l'application $f_\sigma : E \to E$ définie, pour tout $x = (x_i)_i \in E$ et tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, par

$$(f_\sigma(x))_i = x_{\sigma(i)}.$$

Montrer que $f_\sigma \in \mathcal{L}(E)$ et que la matrice représentative de f_σ par rapport à la base canonique $\mathcal{C}$ est donnée, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, par

$$(\mathrm{Mat}_C(f_\sigma))_{i,j} = \delta_{i,\sigma^{-1}(j)}.$$

Solution L'application f_σ est linéaire parce que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(f_\sigma(x+y))_i = (x+y)_{\sigma(i)} = x_{\sigma(i)} + y_{\sigma(i)} = (f_\sigma(x))_i + (f_\sigma(y))_i,$$
$$(f_\sigma(\lambda x))_i = (\lambda x)_{\sigma(i)} = \lambda x_{\sigma(i)} = \lambda(f_\sigma(x))_i.$$

Ensuite, comme les vecteurs de la base canonique $C = (\varepsilon_j)_{j\in\{1,\dots,n\}}$ sont donnés par $(\varepsilon_j)_i = \delta_{i,j}$ pour tous $i,j \in \{1,\dots,n\}$, nous obtenons, pour tous $i,j \in \{1,\dots,n\}$,

$$(f_\sigma(\varepsilon_j))_i = \delta_{\sigma(i),j} = \delta_{i,\sigma^{-1}(j)},$$

où nous avons utilisé que $\sigma(i) = j$ ssi $i = \sigma^{-1}(j)$ parce que $\sigma \in S_n$ est une bijection, c.-à-d., nous avons $f_\sigma(\varepsilon_j) = \varepsilon_{\sigma^{-1}(j)}$ pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$. Alors, pour la matrice représentative de f_σ par rapport à la base canonique $\mathcal{C}$, nous obtenons, pour tous $i,j \in \{1,\dots,n\}$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{Mat}_C(f_\sigma))_{i,j} &= \begin{pmatrix} | & & | \\ f_\sigma(\varepsilon_1) & \dots & f_\sigma(\varepsilon_n) \\ |_C & & |_C \end{pmatrix}_{i,j} = \begin{pmatrix} f_\sigma(\varepsilon_1) \dots f_\sigma(\varepsilon_1) \end{pmatrix}_{i,j} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\sigma^{-1}(1)} \dots \varepsilon_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}_{i,j} \\ &= (\varepsilon_{\sigma^{-1}(j)})_i = \delta_{i,\sigma^{-1}(j)}.\end{aligned}$$

□

Question 13. [3.0] Utiliser l'algorithme du pivot de Gauss sur les lignes pour déterminer $\det(A)$ en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est donné par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 1 & 5+a & 5+2a \\ 2 & 1+2a & 1+5a \end{pmatrix}.$$

<u>Solution</u> (cf. 901 Ex.13,2. ; TD 28c))

Comme demandé, nous devons exclusivement utiliser l'algorithme du pivot de Gauss sur les lignes [321] pour déterminer $\det(A)$. Nous effectuons les opérations élémentaires suivantes pour rendre A triangulaire supérieur :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 1 & 5+a & 5+2a \\ 2 & 1+2a & 1+5a \end{pmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longrightarrow} A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & 1+2a & 1+5a \end{pmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\Longrightarrow} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$
$$\overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2}{\Longrightarrow} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longrightarrow} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

En prenant en compte l'effet des opérations élémentaires utilisées [900 Thm.13] et le fait que le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit des coéfficients diagonaux de cette matrice [898 Cor.3,2.], nous obtenons

$$\det(A) = \det(A_1) = \det(A_2) = 5\det(A_3) = 5\det(A_4) = 5a.$$

Remarque : Nous pouvons écrire les étapes dans l'algorithme de Gauss de manière plus compacte à l'aide des matrices de transvection et de dilatation [822 Déf.2]. Les quatre opérations ci-dessus correspondent à $A_1 = T_{2,1}(-1)A$, $A_2 = T_{3,1}(-2)A_1$, $A_3 = D_2(\frac{1}{5})A_2$ et $A_4 = T_{3,2}(-1)A_3$, c.-à-d.,

$$A_4 = T_{3,2}(-1)D_2(\tfrac{1}{5})T_{3,1}(-2)T_{2,1}(-1)A,$$

d’où [895 Thm.10,2.]

$$\underbrace{\det(A_4)}_{=a} = \underbrace{\det(T_{3,2}(-1))}_{=1}\underbrace{\det(D_2(\tfrac{1}{5}))}_{=\frac{1}{5}}\underbrace{\det(T_{3,1}(-2))}_{=1}\underbrace{\det(T_{2,1}(-1))}_{=1}\det(A),$$

où nous avons utilisé que les matrices de transvection sont triangulaires (supérieures ou inférieures) et que les matrices de dilatation sont diagonales.

□